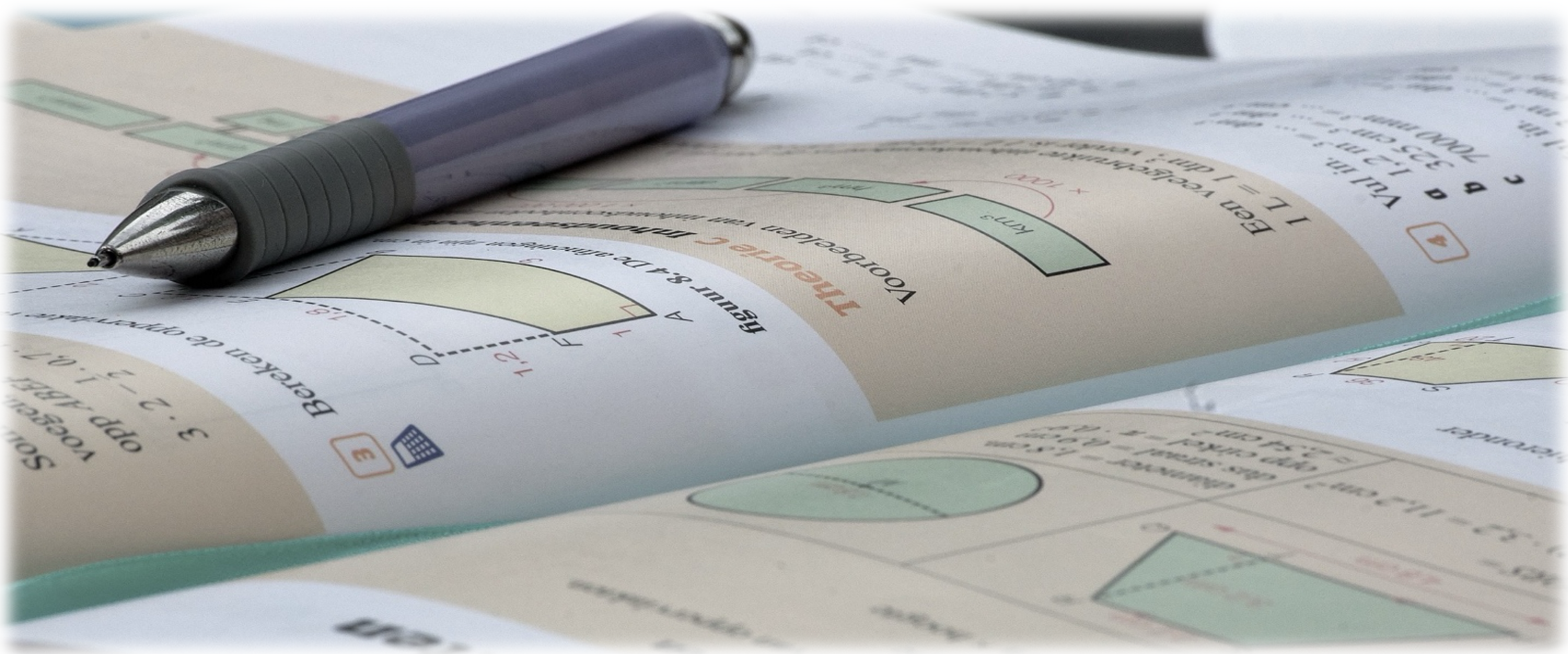
¿Saldrá esto en el examen?



INSPIRACIÓN PARA ABORDAR LAS PREGUNTAS DE LOS EXÁMENES ESTANDARIZADOS DE FORMA CONCEPTUAL Y CREATIVA

SABES

MA Public Adult Education Professional Development System
A PUBLIC ADULT EDUCATION OF MA PROGRAM

TERC
Because math and science build futures

Agradecimientos

"¿Saldrá esto en el examen?" ha sido desarrollado por el equipo de desarrollo profesional de Mathematics and Adult Numeracy Curriculum & Instruction de SABES, gestionado por TERC, Inc., con financiación del Sistema de Educación Pública para Adultos de Massachusetts.

Redactado por Aren Lew

Con contribuciones de Connie Rivera e Yvonne Readdy

Diseño y distribución de Sherry Soares

Este documento puede descargarse en https://sabes.org/content/will-be-test-inspiration-tackling-standardized-test-questions-conceptually-and-creatively.

"¿Saldrá esto en el examen?" no sería posible sin la mente creativa de Aren Lew, del equipo de desarrollo profesional de Mathematics and Adult Numeracy Curriculum & Instruction de SABES. Este documento se basa en su serie del mismo nombre, un artículo destacado el blog del Centro de Numeración de Adultos del TERC. También, gracias al equipo de revisión del blog formado por Heidi Schuler, Donna Curry y Sherry Soares.

Siga el blog en https://www.terc.edu/adultnumeracycenter/blog/

Introducción

Los estándares de preparación universitaria y profesional para la educación de adultos (CCRSAE) nos piden que adoptemos tres cambios clave en la enseñanza de las matemáticas: enfoque, coherencia y rigor.

Enfocarse significa centrarse firmemente en lo que marcan los estándares, no construir un plan de estudios que tenga "una milla de ancho y una pulgada de profundidad".

La coherencia nos llama a desarrollar conexiones sólidas entre los conceptos, ayudando a los estudiantes a aprovechar y ampliar el aprendizaje previo a nuevas ideas.

Enseñar con rigor significa abordar con la misma intensidad la comprensión conceptual, la fluidez procedimental y la aplicación.

Lo que el CCRSAE no nos dice es cómo hacer todas estas cosas y al mismo tiempo preparar a los estudiantes para una prueba crítica que tendrá una gran repercusión en su futuro y que abarca temas de todo el plan de estudios desde Kínder hasta 12.º grado, especialmente cuando nuestros estudiantes están con nosotros poco tiempo o su asistencia es irregular. Puede parecer que no tenemos otra opción que centrarnos únicamente en el examen.

Sin embargo, la investigación demuestra que es posible preparar a los estudiantes para el éxito en los exámenes estandarizados sin hacer del examen el objetivo principal de nuestra instrucción:

> *En un estudio longitudinal que llevé a cabo en Inglaterra, los estudiantes trabajaron en proyectos abiertos durante tres años (de los 13 a los 16 años) que desembocaron en exámenes nacionales estandarizados. No realizaban exámenes ni se calificaba su trabajo. Los estudiantes se enfrentaban a preguntas cortas que evaluaban los procedimientos en las últimas semanas antes del examen, ya que los maestros les entregaban hojas de exámenes para que trabajaran. A pesar de que los estudiantes no estaban familiarizados con las preguntas de los exámenes ni con el trabajo en condiciones cronometradas de ningún tipo, obtuvieron puntuaciones considerablemente superiores a las de una cohorte comparable de estudiantes que pasaron tres años trabajando con preguntas similares a las de los exámenes nacionales y realizando pruebas con frecuencia (Boaler, 1998, 2015).*

Un plan de estudios que abarque los tres cambios, que profundice en la comprensión conceptual y utilice tareas que motiven a los estudiantes a la resolución de problemas y fomenten el pensamiento flexible preparará a los estudiantes para las matemáticas de los exámenes y para las matemáticas de la vida. Sin embargo, puede parecer imposible o poco práctico ignorar los exámenes de alto nivel cuando planificamos nuestras lecciones. Un examen es el factor determinante para muchos estudiantes. El rendimiento de los estudiantes en los exámenes estandarizados puede afectar a la financiación de nuestros programas. De la misma forma, la exposición y la práctica con el tipo de preguntas que los estudiantes verán en un examen de alto nivel puede darles un gran impulso de confianza al enfrentarse a él.

Lo bueno es que podemos dar a los estudiantes esa exposición y práctica sin abandonar nuestro compromiso con el enfoque, la coherencia y el rigor. Podemos utilizar las preguntas de los exámenes estandarizados para ayudar a los estudiantes a profundizar en la comprensión conceptual, desarrollar la fluidez procedimental, ver las aplicaciones y establecer conexiones entre las ideas. Podemos capacitar a los estudiantes para dar sentido a las preguntas de los exámenes que parecen ser matemáticas que nunca han visto antes. No se trata de recordar y reproducir ***el*** enfoque correcto para responder a una pregunta, sino de dar sentido a la tarea y encontrar ***un*** enfoque que funcione.

Por supuesto, habrá preguntas que los estudiantes simplemente no tengan la formación necesaria para responder, pero habrá muchas que puedan resolver aunque no se les haya enseñado la destreza específica que la pregunta pone a prueba. Parte del éxito en el examen consiste en identificar las preguntas que no merecen el tiempo del estudiante y adivinarlas rápidamente para disponer de más tiempo para las que los estudiantes ***pueden*** resolver. (Véase el apéndice 1 para más información al respecto.) Una parte aún mayor para superar con éxito el examen es tener la confianza para pensar con flexibilidad e intentar responder preguntas que parecen intimidantes al principio pero que en realidad son abordables.

La rutina de “Test Talks” o Hablemos del examen

En este paquete, le ofrecemos una rutina de instrucción que le ayudará a crear y alimentar una cultura de aula que valore el pensamiento flexible y la comprensión conceptual y, al mismo tiempo, prepare explícitamente a los estudiantes para aplicar su aprendizaje en el contexto de los exámenes estandarizados. La mayor parte de este paquete son ejemplos de preguntas tipo test que puede utilizar con esta rutina. Léalas e inténtelo usted mismo antes de compartirlas con sus estudiantes. (Las preguntas tipo test de este paquete también se pueden encontrar en la serie de blogs en curso ***¿Saldrá esto en el examen?*** que se encuentra en https://www.terc.edu/adultnumeracycenter/blog/. Para encontrar los posts de esta serie, utilice la función de "búsqueda" situada en la parte superior de la página web y escriba las palabras "¿saldrá esto en el examen?").

Esta rutina se llama **Hablemos del examen** y está muy centrada en compartir y justificar el razonamiento. Esta rutina propicia el Estándar para la Práctica Matemática #3: Desarrollar argumentos viables y criticar el razonamiento de los demás, lo cual es especialmente importante cuando se trata de preparar exámenes estandarizados porque, en una situación de examen, los estudiantes pueden entrar en pánico y recurrir a la estrategia de "agarrar números": tomar los números que ven en la pregunta y aplicar alguna operación al azar para llegar a una respuesta rápidamente. El pánico puede dificultar o incluso imposibilitar el razonamiento, por lo que practicar el razonamiento con calma y la construcción de argumentos viables cuando se enfrenten a preguntas de examen preparará a los estudiantes tanto matemática como emocionalmente para la prueba.

Como ocurre con cualquier rutina, es probable que los estudiantes tengan dificultades o incluso se resistan las primeras veces que la haga. Sea paciente y anímelos. Puede ofrecer más apoyo al principio para ayudar a los estudiantes a hacerse a la idea de que pueden abordar cualquier pregunta del examen aunque al principio parezca algo que no están preparados para responder.

A continuación, encontrará una sugerencia de cómo podría ser la estructura de la rutina Hablemos del examen. Puede durar unos 30 minutos, pero puede variar en función de sus estudiantes y de la pregunta que elija. No dude en adaptarlo a sus estudiantes.

Hablemos del examen

Objetivos:

Ayudar a los estudiantes a aplicar y ampliar su aprendizaje en el contexto de las preguntas de los exámenes estandarizados.

- Consolidar el aprendizaje y funcionar como evaluación formativa.
- Capacitar a los estudiantes para pensar de forma flexible y creativa en situaciones de examen.
- Desarrollar la capacidad de los estudiantes para dar sentido a los problemas y perseverar en su resolución (Estándar para la Práctica Matemática #1 del CCRSAE.)

Nota: El objetivo de Hablemos del examen ***no*** es enseñar a los estudiantes cómo abordar preguntas o tipos de preguntas específicas de un examen.

Proceso:

1. **Seleccione una pregunta.** Elija una pregunta tipo test para presentarla a sus estudiantes. (Hay muchos ejemplos en este paquete.) Elija una pregunta que:
    - **No ha** enseñado explícitamente a sus estudiantes cómo responder. (El objetivo de Hablemos del examen es ayudar a los estudiantes a aprender a pensar de forma flexible y creativa en una situación de prueba, por lo que es importante que se les coloque en una situación que requiera pensar).
    - Usted cree que sus estudiantes tienen la comprensión fundamental necesaria para encontrar un camino hacia la solución.

    Más orientación para elegir una pregunta adecuada:

    - Muchas de estas preguntas pueden utilizarse en casi cualquier momento de su plan de estudios. No es necesario que la pregunta que elija esté relacionada con el trabajo que su clase está realizando actualmente.
        - Elegir una pregunta relacionada con el trabajo actual puede ayudar a los estudiantes a establecer conexiones y aplicar y ampliar su aprendizaje o activar conocimientos previos al comienzo de una lección o unidad.
        - Elegir una pregunta que ***no esté*** relacionada con el trabajo que su clase está realizando actualmente puede proporcionar a los estudiantes una buena práctica para dar sentido a las preguntas sin pistas sobre de qué tema o dominio proceden, algo que tendrán que hacer en el examen.
2. **Establezca expectativas.** Comparta sus expectativas con sus estudiantes. Diga algo como, "Voy a plantearles una pregunta como la que podrían ver en un examen de alto nivel. Puede parecerles poco familiar o intimidante, pero creo que tienen las habilidades necesarias para comprenderla. Les voy a dar mucho tiempo para trabajar en ella y quiero que elijan la respuesta que consideren correcta y estén preparados para explicar por qué la han elegido. No se trata de recordar lo que hay que hacer, sino de utilizar un cerebro pensante para idear una estrategia que tenga sentido".

3. **Asigne a los estudiantes una pregunta.** Comparta la pregunta y las opciones de respuesta con sus estudiantes. Este paquete incluye un folleto para cada pregunta. (Asegúrese de que todos entienden las palabras de la pregunta).

4. **Dé tiempo para pensar.** Dé a los estudiantes tiempo suficiente para trabajar. Circule por el salón y observe. Ofrezca apoyo y ánimo a los estudiantes que parezcan frustrados o incapaces de empezar, pero no haga el trabajo de hacerles comprender la pregunta. (Esto debería ser menos necesario a medida que los estudiantes se acostumbren a las rutinas de Hablemos del examen.) He aquí algunas formas de ofrecer apoyo sin hacer el trabajo por el estudiante:

   - Sugiera a los estudiantes que vuelvan a leer la pregunta y luego intenten reformularla con sus propias palabras.
   - Anime a los estudiantes a pensar en cuál podría ser una respuesta razonable y a evaluar las opciones de respuesta para ver si pueden eliminar alguna.
   - Anime a los estudiantes a hacer un dibujo que les ayude a comprender las relaciones de la pregunta.
   - En el caso de las preguntas sobre situaciones en contexto, anime a los estudiantes a pensar en lo que harían si se encontraran en la situación descrita en la pregunta.
   - Anime a los estudiantes a centrarse en lo que sí saben y no en lo que no saben.
   - Reconozca que se trata de un reto y posiblemente de algo nuevo y desconocido. Recuerde a los estudiantes que son capaces de enfrentarse a cosas nuevas y desconocidas.
   - Recuerde a los estudiantes que está bien que hagan su mejor conjetura, pero que deben tener una razón para su conjetura aunque no estén seguros al 100% de que sea la respuesta correcta.
   - Anime a los estudiantes a utilizar su tiempo de reflexión para dar sentido a la pregunta o para identificar lo que les hace sentirse atascados.
   - Si algún estudiante encuentra una respuesta rápidamente, anímele a buscar otros caminos para llegar a la solución.

5. **Facilite la puesta en común de estrategias.** Cuando los estudiantes hayan tenido tiempo suficiente para elaborar una respuesta y una explicación, invite a los estudiantes a compartir sus ideas en voz alta o en la pizarra (o espacio digital compartido). (Si debe escribir para un estudiante, anote sus ideas y escriba su nombre junto a su trabajo, por ejemplo: "Estrategia de Tina"). Obtenga tantos enfoques diferentes como sea posible. (No añada ni quite nada al pensamiento del estudiante con sus propias respuestas ni corrija las respuestas erróneas. Todos los estudiantes deben estar de acuerdo en la respuesta correcta al final de la discusión).

6. **Comparta estrategias adicionales.** Si hay algún enfoque que los estudiantes no describieron y que a sus alumnos les beneficiaría ver, compártalo después de que todos los estudiantes hayan presentado sus ideas. No es necesario compartir todas las estrategias posibles, solo aquellas que sean accesibles y útiles para sus estudiantes.

7. **Asegúrese de que los estudiantes tengan una estrategia que les gusta.** Asegúrese de que todos los estudiantes estén de acuerdo en la respuesta correcta y hayan visto al

menos una estrategia que tiene sentido para ellos. Haga hincapié en que lo importante es que cada estudiante sea capaz de dar sentido a la pregunta y al menos a una estrategia. Los estudiantes no deben preocuparse por dar sentido a todas las estrategias que vean. Este es un buen momento para señalar que las matemáticas pueden ser flexibles y creativas y que el mismo tipo de razonamiento no va a convencer a todo el mundo.

8. **Anime a tomar notas.** Pida a los estudiantes que anoten su estrategia favorita para abordar la pregunta y por qué les ha gustado. Conceda varios minutos a los estudiantes para que lo hagan con detenimiento. Esto ayudará a los estudiantes a conectar con la estrategia que más sentido tuvo para ellos e interiorizarla.
9. **Facilite un debate final**. Invite a los estudiantes a compartir qué estrategia fue su favorita y por qué. Esto ayuda a los estudiantes a consolidar lo que han aprendido de la rutina y les da la oportunidad de animarse mutuamente, creando comunidad y confianza.

   (Para la evaluación formativa, puede recoger el trabajo de los estudiantes y revisarlo. Sin embargo, no califique ni evalúe su trabajo).

Una nota sobre las calculadoras: A menos que los estudiantes se estén preparando para un examen en el que no se les permita utilizar calculadoras, se les debe permitir su uso durante las rutinas Hablemos del examen, pero debe animarlos a que las utilicen con criterio y para apoyar sus razonamientos.

Una nota sobre la enseñanza para la equidad y la inclusión

Los Hablemos del examen representan un alejamiento de las formas tradicionales de preparación para el examen y los estudiantes pueden resistirse a este cambio, sobre todo al principio. Es posible que los estudiantes se sientan atraídos por los métodos tradicionales de enseñanza y aprendizaje porque es lo único que han conocido. Los estudiantes pueden confundir su éxito en matemáticas con su éxito en un aula tradicional, incluso si ese modelo no les ha funcionado, les ha llevado a odiar las matemáticas o les ha convencido de que no se les dan bien. Como maestros, es posible que nos sintamos igual: fieles a la forma en que experimentamos las matemáticas como estudiantes aunque veamos que no funciona con nuestros estudiantes. Es difícil romper con la forma en que hemos conocido la educación matemática.

Algunos principios fundamentales de la educación matemática tradicional son que existe una forma adecuada de hacer cada problema y que los estudiantes deben practicar siguiendo los pasos hasta que automaticen el proceso. Es posible que a nosotros o a nuestros estudiantes se nos haya enseñado a no utilizar nuestro propio razonamiento (por ejemplo, "Tienes la respuesta correcta, pero no lo has hecho como debías"). Puede que incluso se nos haya enseñado implícita o explícitamente a no pensar por nosotros mismos ni a hacer preguntas, mediante el aprendizaje de "trucos" que pretenden facilitarnos el trabajo o evitarnos tener que pensar. ¿Cuántos de nosotros aprendimos a dividir fracciones con alguna variante de "No te ocupes del por qué; ¡sólo invierte y multiplica!"? ¿Qué mensaje nos da eso sobre nuestra propia capacidad de razonar?

Merece la pena dedicar un minuto a considerar de dónde proceden estas ideas restrictivas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Las formas tradicionales de enseñar evolucionaron en un sistema que se ha guiado por la cultura dominante, una cultura que privilegia las normas de personas blancas, de clase media y heteronormativas. Son normas que no fueron elegidas por nuestros estudiantes. Ni siquiera las hemos elegido nosotros como maestros. Simplemente, han sido así durante tanto tiempo que las hemos interiorizado. Además, siguen privilegiando una perspectiva cultural concreta y excluyendo a las personas que no proceden de esa tradición cultural.

Un buen lugar para conocer las normas y características de la cultura dominante y cómo nos afectan es www.whitesupremacyculture.info. Allí encontrará una lista de la Dra. Tema Okun de "características de la cultura de supremacía blanca" que están presentes en muchas organizaciones. Incluso, estas características aparecen en las clases de matemáticas. Una que prevalece especialmente en las clases de matemáticas es "la creencia en una única forma correcta"*.

La creencia de que solo hay una forma correcta de hacer matemáticas, que es una norma de la cultura dominante, permea profundamente las formas tradicionales de enseñar y aprender matemáticas y se ve reforzada por la cultura de realización y preparación de exámenes. Asimismo, inhibe a los estudiantes, les impide desarrollar su propia capacidad de pensamiento creativo y flexible y refuerza la idea perjudicial de que su trabajo consiste en escuchar, recordar y reproducir y no en ser pensadores por derecho propio.

---

* (Es importante comprender que ***nombrar*** las características de la cultura de la supremacía blanca es muy diferente de ***creer*** en la supremacía blanca. Se trata de normas culturales, no de creencias individuales).

Cuando enseñamos con Hablemos del examen y otros enfoques que centran a los estudiantes y dan prioridad a la comprensión conceptual, nos estamos oponiendo a la creencia tóxica de la "única forma correcta". Estamos haciendo algo más que preparar a nuestros estudiantes para el examen: estamos cambiando la cultura de la clase de matemáticas y tomando partido por hacer de la clase de matemáticas un lugar equitativo e inclusivo para TODOS los estudiantes.

Atender las preocupaciones de los estudiantes

Es posible que sus estudiantes tengan algunas inquietudes acerca de los Hablemos del examen. He aquí algunas preocupaciones que pueden surgir y algunas posibles respuestas.

P: En el examen no podré tomarme todo el tiempo que quiera para cada pregunta. ¡Hay un límite de tiempo!

R: Para rendir al máximo en el examen, deben dedicar a cada pregunta que les resulte abordable el tiempo necesario para que la acierten. Algunas preguntas las adivinarán y seguirán adelante. En otras se tomarán su tiempo y estarán seguros de haberlas acertado. No tienen por qué acertar todas las preguntas ni dedicar el mismo tiempo a cada una de ellas. Además, si se toman su tiempo y practican las estrategias ahora, conseguirán razonar más rápidamente las preguntas del examen.

P: ¿Por qué tengo que aprender todas estas estrategias diferentes?

R: No tienen que aprender muchas estrategias diferentes, pero ver distintas formas de enfocar cada pregunta les ayudará a tener la mente abierta y a ser flexibles cuando vean una pregunta desconocida en el examen. Concéntrense en las estrategias que realmente tengan sentido para ustedes y repasen el razonamiento de esas estrategias, no para memorizar, sino para comprender. Todo el mundo piensa de forma diferente y compartiendo nuestras ideas con los demás, todos podemos potenciar nuestros puntos fuertes.

P: ¿Por qué no puede enseñarnos a responder a las preguntas del examen?

R: Si les muestro exactamente cómo resolver cada pregunta, estaré haciendo el trabajo difícil por ustedes y solo sabrán resolver problemas que yo les haya enseñado. Para tener éxito en el examen, es fundamental que practiquen por su cuenta cómo dar sentido a las preguntas. A través de esta práctica, desarrollarán la habilidad de comprender y resolver problemas que nunca han visto antes. Al enfrentarse a preguntas desafiantes y desconocidas, se están preparando para los retos del examen, y al mismo tiempo, fortalecen y flexibilizan su pensamiento. Este tipo de aprendizaje no solo les ayudará a aprobar el examen, sino que también les permitirá aplicar sus conocimientos matemáticos en la vida real y en la universidad.

Q. No se me da bien o no tengo tiempo para hacer dibujos en el examen.

A. Sus dibujos no tienen por qué ser perfectos, pero dibujar puede ayudarles a ***visualizar*** la pregunta de una manera que quizás no lograrían sólo con leer las palabras o escribir los números. A veces, recordar los pasos para resolver un problema puede ser difícil, o es posible que nunca hayan aprendido cómo abordarlo. Sin embargo, representar la pregunta a través de un dibujo les permite identificar patrones y relaciones, lo que puede ayudarles a encontrar una solución. Además, dibujar introduce la información en el cerebro de una forma distinta, brindándole más maneras de procesarla y comprenderla.

Q. ¿Pero no hay preguntas en las que sólo necesito saber cómo hacerlo?

A. Sí. Habrá preguntas que no podrán responder a menos que hayan aprendido una habilidad específica. No obstante, nuestra intención aquí es de prepararse para responder a las preguntas que puedan ***resolver***. Probablemente verán preguntas que están fuera de su alcance, pero no pasa nada porque no tienen que responder correctamente todas y cada una de las preguntas. A veces, simplemente adivinarán la respuesta y pasarán a otra pregunta que ***sí puedan*** resolver. (En los apéndices encontrará más información sobre este tipo de preguntas).

Las preguntas

En esta sección encontrará preguntas de ejemplo para Hablemos del examen. Con cada pregunta, encontrará:

Los conocimientos que los estudiantes necesitan para dar sentido a la pregunta

- No se trata de una lista de cosas que deba enseñar previamente, sino de un indicador que le ayudará a decidir si la pregunta será adecuada para sus estudiantes.
- Estos son los conocimientos mínimos que los estudiantes necesitan para por lo menos tener un punto de acceso a la pregunta. A menudo, las preguntas están diseñadas para centrarse en una habilidad o estrategia concreta, pero los estudiantes que aprenden a pensar de forma flexible y creativa encuentran diferentes maneras de responder a la pregunta aunque no hayan aprendido ese enfoque. (Por ejemplo, una pregunta que se resuelve utilizando una ecuación algebraica también se puede resolver con otros enfoques).

Una lista de varias estrategias para abordar la pregunta

- Estas estrategias utilizan la comprensión conceptual, el pensamiento flexible y lo visual como formas de razonar sobre la pregunta. A pesar de que muchas de estas preguntas también se responden utilizando un procedimiento, aquí no encontrará esos enfoques procedimentales. Los estudiantes que conozcan los procedimientos para responder a preguntas concretas no tendrán problemas con las mismas, pero **las charlas de examen están diseñadas para ayudar a los estudiantes a prepararse para preguntas en las que no tengan que depender de un procedimiento memorizado**.
- La lista de estrategias no pretende ser exhaustiva. Es posible que a usted o a sus estudiantes se les ocurran enfoques interesantes que no figuran en esta lista.

Después de la redacción del maestro para cada pregunta, encontrará el correspondiente folleto para el estudiante.

Índice

Apéndices

PREGUNTA 1

Julia utiliza una fotocopiadora para ampliar el logotipo de un negocio. Las dimensiones originales del logotipo eran 2" por 3". ¿Cuáles de las siguientes ***no podrían*** ser las dimensiones de la ampliación?

A. 4" por 5"

B. 4" por 6"

C. 6" por 9"

D. 8" por 12"

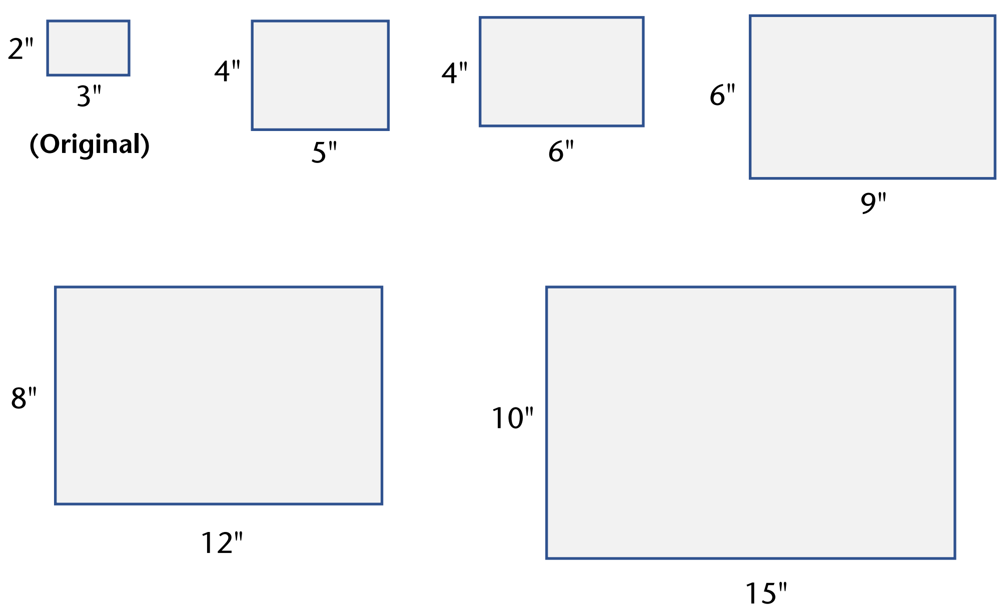
E. 10" por 15

Comprensión básica necesaria

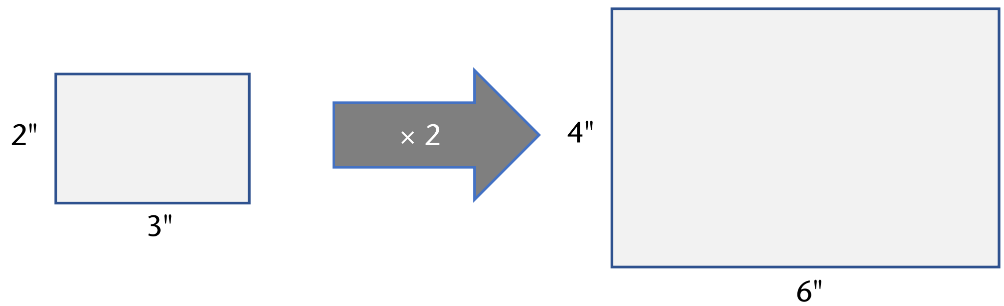
Los estudiantes deben tener una idea de lo que significa ampliar una imagen. Algunas de las estrategias presentadas utilizan una comprensión más formal del razonamiento proporcional, pero es probable que los estudiantes puedan desenvolverse con una comprensión informal.

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

1) **Hacer dibujos.** Un estudiante podría esbozar rectángulos con todos los conjuntos de dimensiones incluido el original y observarlos a ojo para ver cuál de ellos parece que no tiene la misma figura que el resto.

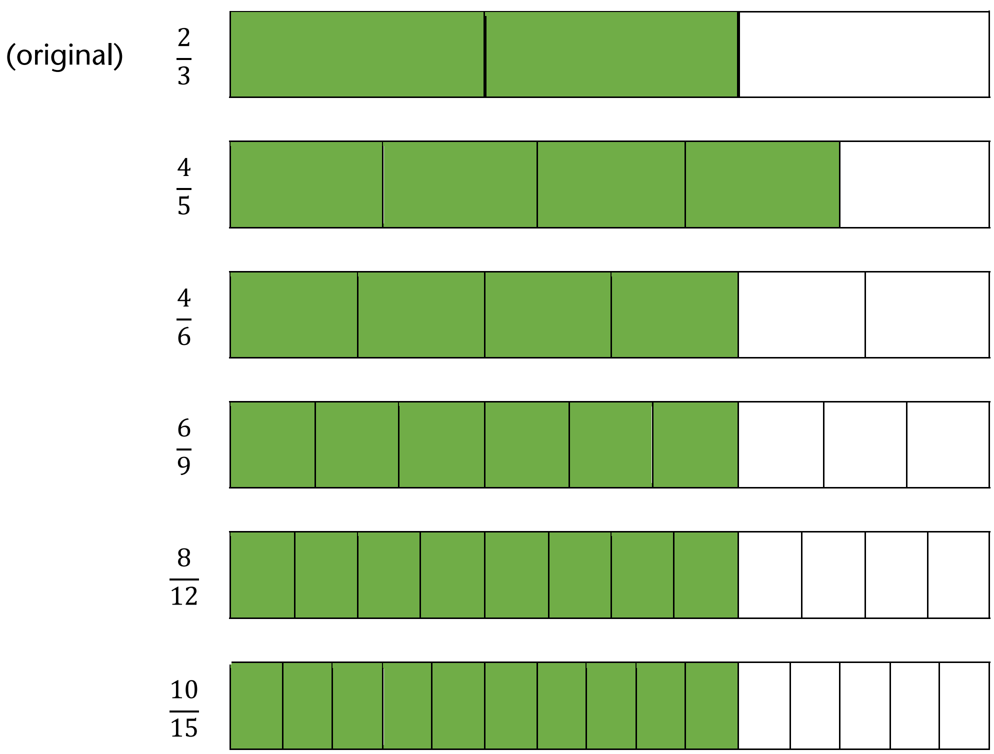


2) **Empezar con una ampliación conocida.** Un estudiante puede empezar haciendo un dibujo que muestre una ampliación sencilla. La forma más sencilla de ampliar un dibujo es duplicar sus dos dimensiones.



Basándose en esta imagen, un estudiante podría razonar que solo hay una ampliación adecuada con una altura de 4" y puesto que doblando las dimensiones se obtuvo una de 4" por 6", una ampliación de 4" por 5" no funcionaría.

3) **Comparar fracciones visualmente.** Un estudiante podría considerar la relación entre la longitud y la anchura del logotipo como una fracción y comparar visualmente las fracciones para cada ampliación.



4) **Buscar la estructura.** Un estudiante podría razonar que se amplía una imagen multiplicando ambas dimensiones por el mismo número y observar que la opción de respuesta A es la única en la que la segunda dimensión no es múltiplo de 3. Si luego lo comprueba intentando establecer proporciones iguales, sus sospechas se confirmarían.

multiplicado por 2

$$\frac{2}{3} \stackrel{?}{=} \frac{4}{5}$$

no es multiplicado por 2

PREGUNTA 1

Julia utiliza una fotocopiadora para ampliar el logotipo de un negocio. Las dimensiones originales del logotipo eran 2" por 3". ¿Cuáles de las siguientes ***no podrían*** ser las dimensiones de la ampliación?

A. 4" por 5"

B. 4" por 6"

C. 6" por 9"

D. 8" por 12"

E. 10" por 15

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 2

El patio de José es un rectángulo que mide 5 por 8 yardas. ¿Cuántos **pies cuadrados** de césped necesitará para cubrir el patio?

A. 13

B. 40

C. 120

D. 360

E. 400

Comprensión básica necesaria

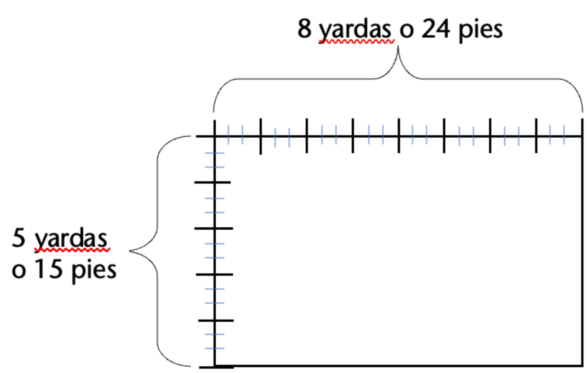
Los estudiantes deben conocer la relación entre pies y yardas (algo que puede decirles al presentar la pregunta si es necesario). Al mismo tiempo, los estudiantes deben saber qué significa el área y qué es una unidad cuadrada y ser capaces de dar sentido a "5 yardas por 8 yardas". No es necesario que los estudiantes sepan cuántos pies cuadrados hay en una yarda cuadrada ni que hayan razonado antes sobre estas unidades.

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

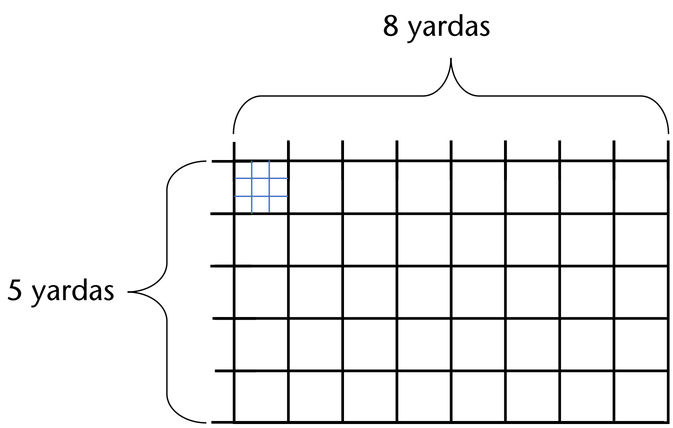
1) **Estimar utilizando la experiencia previa.** Un estudiante podría basarse en su experiencia en el mundo real para estimar una solución. Un estudiante que tenga experiencia en jardinería, trabajos en el jardín, suelos, baldosas, etc., puede tener una idea intuitiva de lo grande que es este patio y de cuántos metros cuadrados de césped se necesitarían para cubrirlo. Es importante conectar las matemáticas que los estudiantes aprenden en el aula con las que encuentran en el mundo real. Sin esta conexión, los estudiantes pueden llegar a ver las "matemáticas escolares" como algo separado de su experiencia vivida. Puede que no se den cuenta de que pueden aplicar lo que ya saben en una situación de examen. Un estudiante que no establezca esta conexión puede acabar entrando en pánico por intentar recordar una fórmula en lugar de utilizar su propia intuición matemática.

2) **Hacer un dibujo-razonamiento sobre pies y yardas.**

   Un estudiante podría empezar haciendo un dibujo del patio con las dimensiones indicadas en yardas, y luego dividir cada yarda en pies para ver que debe multiplicar 15 por 24 para hallar el número de pies cuadrados.



3) **Haga un dibujo de razonamiento sobre las unidades cuadradas.** Un estudiante podría empezar haciendo un dibujo del patio con las dimensiones marcadas en yardas y luego calcular cuántos pies cuadrados hay en una yarda cuadrada. Utilizando el conocimiento de que hay 3 pies en una yarda, podría dividir visualmente la yarda cuadrada y ***ver*** que contiene nueve pies cuadrados. Entonces, podría convertir la superficie del patio de yardas cuadradas (40) a pies cuadrados multiplicando 40 × 9. Alternativamente, podría calcular el total de pies cuadrados de otra forma, como por ejemplo, averiguar cuántos pies cuadrados hay en cada columna y luego sumar todas las columnas.



PREGUNTA 2

El patio trasero de José es un rectángulo que mide 5 por 8 metros. ¿Cuántos **pies cuadrados** de césped necesitará para cubrir el patio trasero?

A. 13

B. 40

C. 120

D. 360

E. 400

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 3

Un programa de formación laboral aceptó a $\frac{4}{5}$ de las personas que lo solicitaron. Si se aceptó a 60 personas, ¿cuántas personas se presentaron?

A. 12

B. 48

C. 75

D. 80

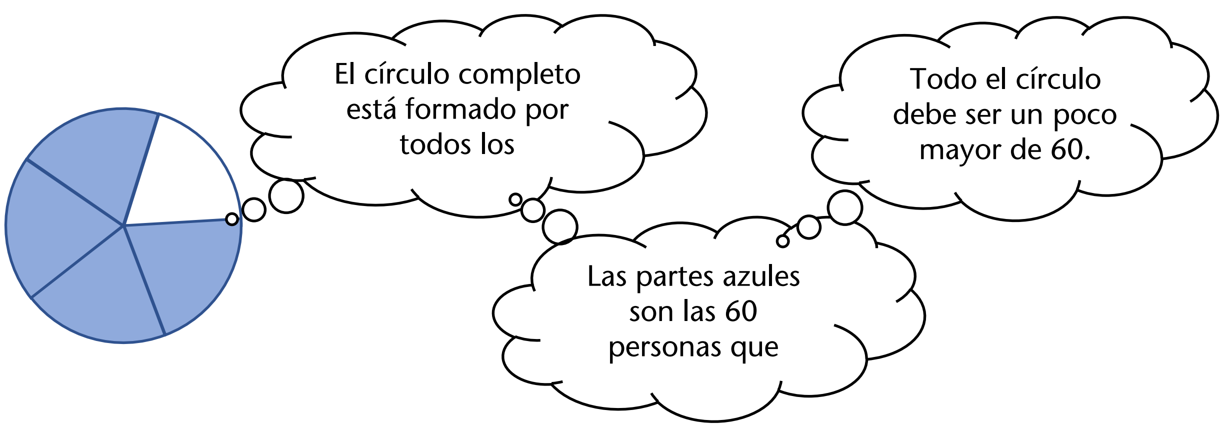
E. 125

Comprensión básica necesaria

Los estudiantes deben comprender el significado de las fracciones: que la relación entre el numerador y el denominador es la relación entre una parte y el todo. Los estudiantes no necesitan conocer ningún procedimiento de operación de fracciones para tener un punto de acceso en esta pregunta.

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

1) **¡Estimar!** Un estudiante que se tome el tiempo necesario para dar sentido a esta pregunta y pensar qué respuestas son razonables, reducirá rápidamente las posibilidades a dos opciones de respuesta. Lleva un poco de tiempo y esfuerzo descifrar las relaciones de esta pregunta, pero merece la pena. Un estudiante podría hacer un bosquejo rápido de la fracción de la pregunta y utilizarlo para averiguar lo que tiene y lo que busca:



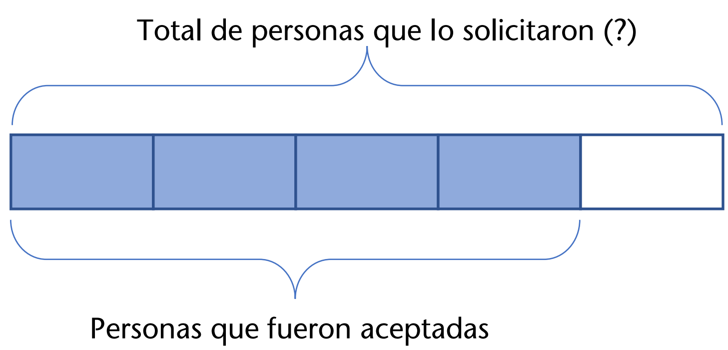
Tres de las opciones de respuesta son mayores que 60, pero la opción de respuesta **(E)** es más del doble de grande y el bosqueto muestra que todo el círculo es solo un poco mayor que la parte sombreada, por lo que la respuesta debe ser **(C)** o **(D)**.

2) **Pensar en las proporciones y dibujarlas.** Un estudiante podría interpretar el hecho de que $\frac{4}{5}$ de los solicitantes fueron aceptados como que cuatro de cada cinco solicitantes fueron aceptados. En otras palabras, por cada cuatro que entraron, uno no fue aceptado. Un estudiante podría intentar dibujar a todos los solicitantes -utilizando símbolos rápidos, no se tarda tanto como podría pensarse. ¿Cuántas X y O hay en el dibujo? Un estudiante podría contarlas de una en una, contar de cinco en cinco o pensar que se trata de una matriz y multiplicar las dimensiones.

   También es posible que después de dibujar los primeros conjuntos un estudiante empiece a ver algunos patrones y regularidades y se pregunte: "¿cuántos de éstos tendré que dibujar?" Como el estudiante ya sabe que hay cinco "personas" en cada fila, responder a esa pregunta será una forma rápida de llegar al total. (Aquí es donde una calculadora puede resultar útil. Dado que hay cuatro personas aceptadas en cada fila y 60 personas aceptadas en total, el número de filas puede hallarse dividiendo 60 por 4. A continuación, el total puede hallarse multiplicando el número de filas por 5. Las calculadoras, utilizadas con criterio, pueden ayudar a los estudiantes a utilizar bien su tiempo y a mantenerse concentrados en situaciones de examen).

OOOOX
OOOOX
OOOOX
OOOOX
OOOOX
OOOOX
OOOOX
OOOOX
OOOOX
OOOOX
OOOOX
OOOOX
OOOOX
OOOOX
OOOOX

3) **Dibujar un modelo de barras (o diagrama de barras de Singapur).** Los modelos de barras son estupendos para dar sentido a las partes y al todo. Cuando los estudiantes se sienten cómodos dibujándolos y razonando con ellos, ofrecen una forma de comprender la estructura de la pregunta que hace que responderla sea bastante intuitivo.



Para responder a la pregunta, un estudiante calcularía cuántas personas representa cada casilla. (Cuatro casillas representan a 60 personas, así que ¿a cuántas personas representa una sola casilla?). Dado que el número total de personas que se presentaron está representado por la barra entera o las cinco casillas, una vez que el estudiante sepa a cuántas personas representa cada casilla, podrá hallar el entero en un solo paso más. (Para ver un ejemplo similar utilizando un modelo como éste, consulte Cómo aprendí a dejar de preocuparme y a amar los porcentajes. Busque aquí más información sobre el uso de modelos de barras para la resolución de problemas).

PREGUNTA 3

Un programa de formación laboral aceptó $\frac{4}{5}$ de las personas que lo solicitaron. Si se aceptó a 60 personas, ¿cuántas personas se presentaron?

A. 12

B. 48

C. 75

D. 80

E. 125

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 4

Jason compró 3 lápices y 2 gomas de borrar por $1.90. Irita compró 4 lápices y 4 gomas de borrar por $3.20. ¿Cuánto cuesta 1 goma de borrar?

A. $0.10

B. $0.20

C. $0.30

D. $0.40

E. $0.50

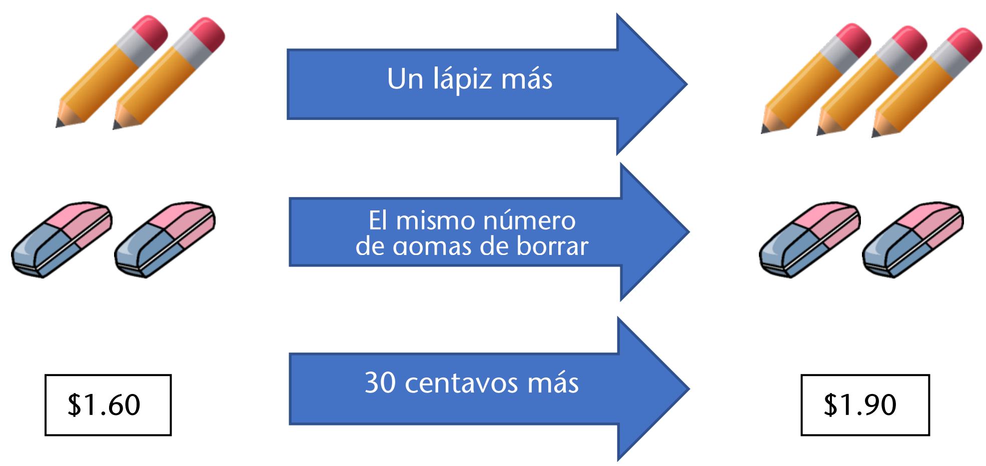
Comprensión básica necesaria

Los estudiantes deben ser capaces de razonar con dinero. Los estudiantes pueden beneficiarse de tener alguna intuición sobre el razonamiento proporcional.

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

1) **Empezar razonando proporcionalmente y deducir el costo de un lápiz.** Un estudiante podría razonar proporcionalmente que si 4 lápices y 4 gomas de borrar cuestan $3.20, la mitad de los lápices y gomas de borrar costarían la mitad. Eso significa que 2 lápices y 2 gomas de borrar cuestan $1.60.

   A continuación, el estudiante podría comparar el costo de 2 lápices y 2 gomas de borrar con el costo de **3** lápices y 2 gomas de borrar (un dibujo ayuda mucho):



   Si la única diferencia entre las dos imágenes es un solo lápiz y la diferencia de precio es de 30 centavos, ¡el lápiz debe costar 30 centavos! Una vez conocido el costo de un lápiz, el estudiante tendría varias opciones para utilizar otra información para averiguar el costo de una goma de borrar.

2) **Razonar proporcionalmente para hallar el costo de un lápiz y una goma de borrar, luego adivinar y comprobar.** Un estudiante podría pensar para encontrar el costo de 1 lápiz y 1 goma de borrar, puede dividir entre 4 el costo total de 4 lápices y 4 gomas de borrar. El costo combinado de un solo lápiz y una goma de borrar es de $0.8. Si se conoce el costo de ambos, es posible determinar el precio de uno si se sabe el del otro. Esto allana el camino para una estimación aproximada bastante eficiente.

    a. Si la goma de borrar cuesta $0.10, entonces el lápiz costaría $0.07. Esto significa que el total de la compra de Jason sería de 3($0.70) + 2($0.10) = $2.40. Sin embargo, esto no es posible (Jason solo gastó $1.60).

    b. Dado que la primera suposición fue tan errónea, el estudiante podría pasar a la opción de respuesta c o d. Aquí una exploración de la opción de respuesta **(C)**: Si una goma de borrar cuesta $0.30, entonces el lápiz costaría $0.50. Esto significaría que el costo total de la compra de Jason sería 3($0.50) + 2($0.30) = $2.10. Es un valor más cercano, pero aún demasiado alto.

    En este punto solo hay dos opciones de respuestas posibles. Intentar cualquiera de ellas guiará al estudiante a la respuesta correcta, ya sea directamente o descartando la otra posibilidad.

3) **Adivinar y comprobar.** Una forma de enfocar esto con adivinar y comprobar es elegir un costo para una goma de borrar basándose en las opciones de respuesta y luego calcular el costo de un lápiz y ver si tiene sentido en ambas compras. Por ejemplo, un estudiante podría adivinar que la goma de borrar cuesta $0.20 (opción de respuesta (**B**)). Luego, podrían mirar la compra de Jason: 3 lápices y 2 gomas de borrar cuestan $1.60. Si las gomas de borrar cuestan $0.20 cada una, supondrían $0.40 del costo, dejando los $1.20 restantes como costo de los 3 lápices. Esto significa que los lápices deben costar $0.40 cada uno. Ahora el estudiante podría comprobar si estos dos costos corresponden con la compra más grande. 4 lápices a $0.40 cada uno y 4 gomas de borrar a $0.20 cada una sumarían un total de $2.40. Esto no coincide con el costo de Irita, por lo que la suposición era errónea.

    El estudiante podría registrar su razonamiento en una tabla como esta, (comenzando con la compra de Jason y verificándolo luego con la compra de Irita):

	Debe sumar $1.60				
Costo del borrador (adivinar)	Costo de 2 gomas de borrar	Costo de 3 lápices	Costo de 1 lápiz	Costo de 4 lápices y 4 gomas de borrar	¿Coincide con $3.20?
$0.20	$0.40	$1.20	$0.40	$2.40	NO

    Ha requerido bastante esfuerzo eliminar sólo una opción de respuesta, pero recuerde que en el examen habrá preguntas en el examen estarán completamente fuera del alcance de algunos estudiantes. Por eso, vale la pena dedicar tiempo extra a una pregunta en la que tienen una alta probabilidad de acertar.

PREGUNTA 4

Jason compró 3 lápices y 2 gomas de borrar por $1.90. Irita compró 4 lápices y 4 gomas de borrar por $3.20. ¿Cuánto cuesta 1 goma de borrar?

A. $0.10

B. $0.20

C. $0.30

D. $0.40

E. $0.50

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 5

¿Qué expresión es equivalente a

$$x^4 \cdot x^5$$

A. x^9

B. x^{20}

C. $2x^9$

D. $2x^{20}$

E. $20x$

Comprensión básica necesaria

Los estudiantes deben saber qué es un exponente y sentirse cómodos con la idea de que una letra puede representar un número desconocido. Los estudiantes deben comprender lo que significa que las expresiones sean equivalentes. No es necesario que los estudiantes hayan aprendido o memorizado reglas sobre las operaciones con exponentes.

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

1) **Intentarlo con un número.** Que la pregunta esté escrita con variables no significa que tenga que resolverse así. Una idea importante sobre las expresiones equivalentes es que tendrán el mismo valor sea cual sea el valor de la variable. Esto significa que un estudiante puede cambiar x por un número, como 2, y elaborar una pregunta más concreta.

$$2^4 \cdot 2^5$$

$$16 \cdot 32$$

$$512$$

Ahora el estudiante solo tiene que averiguar qué opción de respuesta tiene un valor de 512 cuando $x = 2$.

Nota: Incluso con un número pequeño como 2, el valor de la expresión va a ser bastante grande, por lo que es posible que los estudiantes quieran utilizar una calculadora. (Elegir 1 no es una buena idea. ¿Por qué? ¿Podrían sus estudiantes entender por qué?)

---

2) **Escribirlo de la forma larga.** Un estudiante que conozca el significado de un exponente puede escribir expresiones equivalentes ax^4 yx^5 de esta forma:

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$

y

$$x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$$

El estudiante puede ahora multiplicar las expresiones más largas de la siguiente manera:

$$\underbrace{\overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}^{x^4} \cdot \overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}^{x^5}}_{Nueve\ equis}$$

Ahora el estudiante puede volver a convertir su respuesta en una expresión exponencial de modo que coincida con una de las opciones de respuesta.

3) **Averiguar la regla sobre la marcha.** Una de las herramientas más poderosas de un matemático es la capacidad de entender conceptos complejos descomponiéndolos en ideas más simples. Un estudiante que se sienta capaz de pensar como un matemático puede darse cuenta de que tiene el poder de descubrir o reconstruir una regla observando casos más sencillos. Para ello, podría hacer algunos experimentos rápidos con expresiones similares a la del problema y así analizar qué sucede:

   $2^3 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$
   (Compruébelo a mano o con una calculadora, ¡funciona!)

   $2^3 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$
   (Compruébelo a mano o con una calculadora, ¡también funciona!)

   Los exponentes me dicen cuántos 2 habrá en la expresión larga. Parece que la suma de los exponentes me da el número total de 2, así que puedo sumar los exponentes para obtener el exponente final.

PREGUNTA 5

¿Qué expresión es equivalente a

$$x^4 \cdot x^5$$

A. x^9

B. x^{20}

C. $2x^9$

D. $2x^{20}$

E. $20x$

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 6

Un caracol tarda $\frac{3}{4}$ de una hora en recorrer $\frac{3}{5}$ del camino a través de un jardín. Si sigue moviéndose en la misma dirección a la misma velocidad durante otros 15 minutos, ¿qué fracción del jardín habrá cruzado en total?

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{9}{20}$

C. $\frac{27}{20}$

D. $\frac{5}{4}$

E. $\frac{4}{5}$

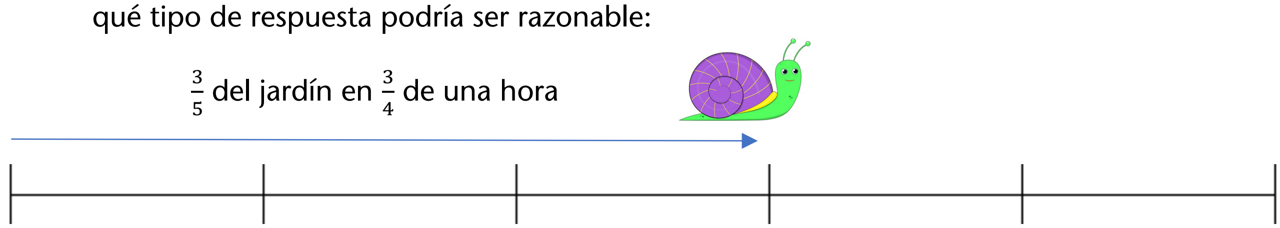
Nota: Para una pregunta que puede resolverse con un razonamiento similar, pero utilizando números más complicados o menos fáciles de manejar, véase la pregunta 7 (Senda del caracol II).

Comprensión básica necesaria

Los estudiantes deben comprender el significado de una fracción y una tasa. También, es útil disponer de algunas fracciones de referencia como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$.

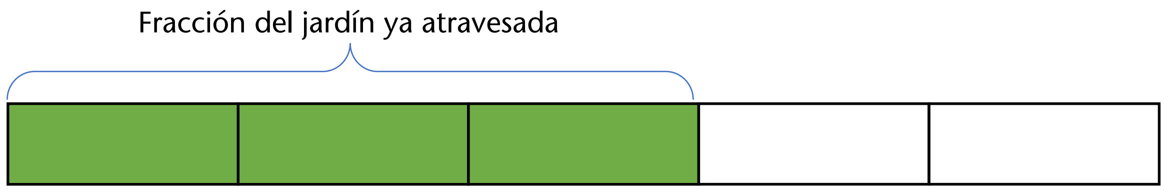
Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

1) **Estimación.** El caracol ya ha viajado durante $\frac{3}{4}$ de una hora y solo va a viajar durante otros 15 minutos o $\frac{1}{4}$ de una hora. ¿Llegará un poco más lejos? ¿Mucho más lejos? ¿El doble de lejos? Un esquema rápido podría ayudar al estudiante a hacerse una idea de qué tipo de respuesta podría ser razonable:



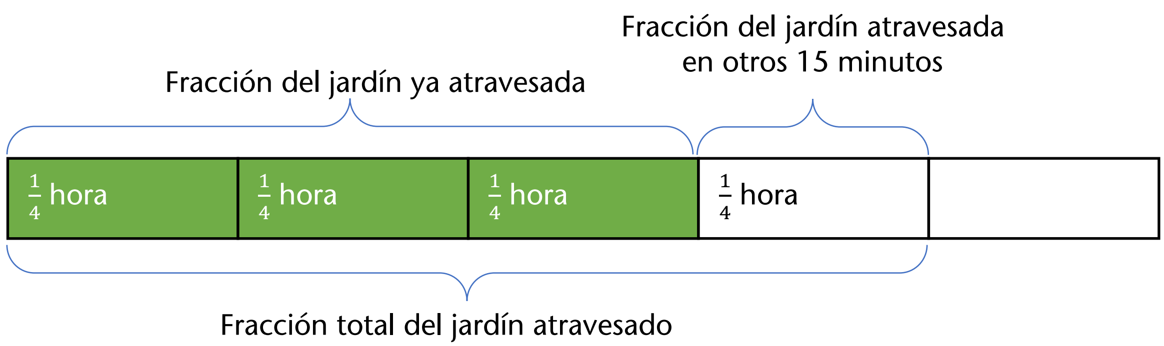
El caracol ya ha recorrido más de la mitad del jardín, así que las opciones de respuesta a y b no tienen sentido porque son menos de la mitad. Las opciones de respuesta c y d son ambas más de uno y no parece que el caracol vaya a llegar más allá del final del jardín en solo 15 minutos más, así que tampoco tienen sentido. ¡Eso solo deja una respuesta posible! (¿Qué fracciones de comprensión se utilizaron aquí?)

2) **Utilizar un modelo de barras (o diagrama de tiras de Singapur)**. Un estudiante podría empezar con una barra que represente los $\frac{3}{5}$ del jardín que el caracol ya ha atravesado. (Observe que se parece al esquema anterior: ambos muestran $\frac{3}{5}$.)



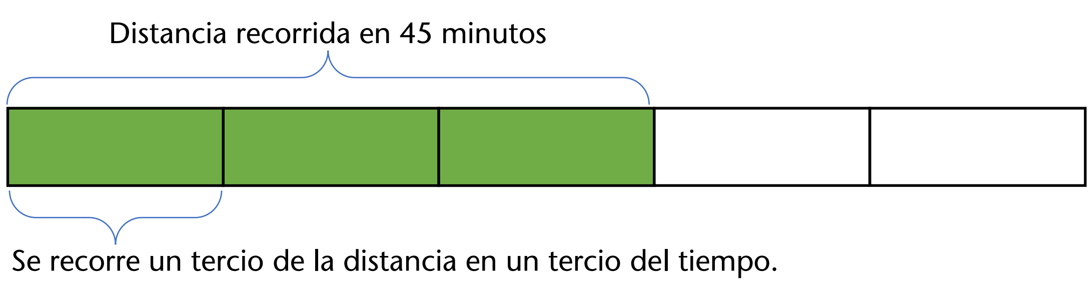
Un estudiante que comprenda que $\frac{3}{4}$ de una hora significa tres grupos de $\frac{1}{4}$ de una hora, será capaz de reconocer que si el caracol recorre tres cuadras en $\frac{3}{4}$ de una hora, está recorriendo una cuadra cada $\frac{1}{4}$ de una hora. (Es una idea compleja pero fundamental , tanto que cuenta con su propio estándar en el CCRSAE: Comprender una fracción a/b con a > 1 como una suma de fracciones 1/b. (4.NF.3))

Incluir el dato de que el caracol recorre una cuadra cada $\frac{1}{4}$ de una hora permitirá al estudiante determinar qué fracción total del jardín habrá recorrido después de 15 minutos más.



(Busque aquí más información sobre el uso de modelos de barras para la resolución de problemas).

3) **Razonar proporcionalmente.** Esta tarea trata de algo que se mueve a un ritmo constante. En otras palabras, la distancia que recorre el caracol es proporcional a la cantidad de tiempo que lleva viajando. Un estudiante podría razonar que 15 minutos son un tercio de 45 minutos, por lo que el caracol recorrería un tercio adicional de la



distancia que ya había recorrido. Un estudiante que comprenda que $\frac{3}{5}$ es tres grupos de $\frac{1}{5}$ puede reconocer que $\frac{1}{5}$ es un tercio de $\frac{3}{5}$, lo que significa que el caracol recorrerá un $\frac{1}{5}$ adicional del jardín.

PREGUNTA 6

Un caracol tarda $\frac{3}{4}$ de una hora en recorrer $\frac{3}{5}$ del camino a través de un jardín. Si sigue moviéndose en la misma dirección a la misma velocidad durante otros 15 minutos, ¿qué fracción del jardín habrá cruzado en total?

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{9}{20}$

C. $\frac{27}{20}$

D. $\frac{5}{4}$

E. $\frac{4}{5}$

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 7

Un caracol tarda $\frac{2}{3}$ de una hora en recorrer $\frac{4}{7}$ del camino a través de un jardín. Si sigue moviéndose en la misma dirección a la misma velocidad durante otros 10 minutos, ¿qué fracción del jardín habrá cruzado en total?

A. $\frac{6}{10}$

B. $\frac{26}{21}$

C. $\frac{8}{21}$

D. $\frac{5}{7}$

E. $\frac{6}{7}$

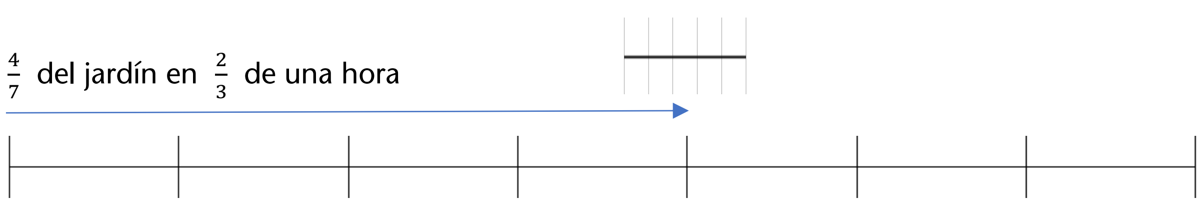
Nota: Para una pregunta que puede resolverse con un razonamiento similar pero que utiliza números más fáciles de manejar, véase la pregunta 6 (Sendero del caracol I).

Comprensión básica necesaria

Los estudiantes deben comprender el significado de una fracción y una tasa. También, es útil disponer de algunas fracciones de referencia como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$.

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

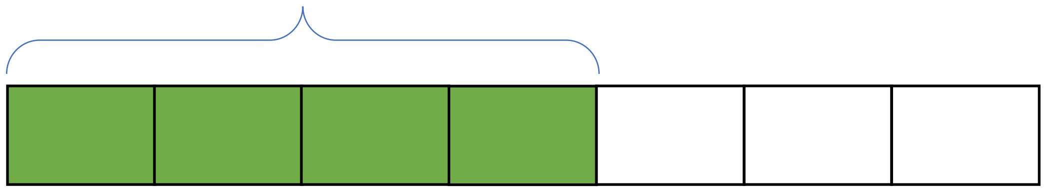
1) **Estimación** El caracol ya ha viajado durante $\frac{2}{3}$ de una hora (o 40 minutos) y solo va a viajar durante otros 10 minutos. Hacer un boceto rápido puede ayudar al estudiante a visualizar hasta dónde podría llegar el caracol. ¿Qué distancia cree que llegaría el caracol en 10 minutos más?



El caracol ya ha recorrido algo más de la mitad del jardín, por lo que la opción de respuesta **(C)** puede eliminarse porque es menos de la mitad. La opción de respuesta **(A)** es más de la mitad pero no por mucho. Como observamos en el boceto, parece que el caracol habrá pasado la mitad del camino en otros diez minutos, por lo que la opción de respuesta **(A)** no es probable. La opción de respuesta **(B)** es más de una y no parece que el caracol vaya a llegar más allá del final del jardín en solo 10 minutos más. Todavía quedan un par de respuestas posibles. ¿Cuál elegiría sólo con ver la imagen? ¿Qué conocimiento sobre fracciones se utilizó aquí?

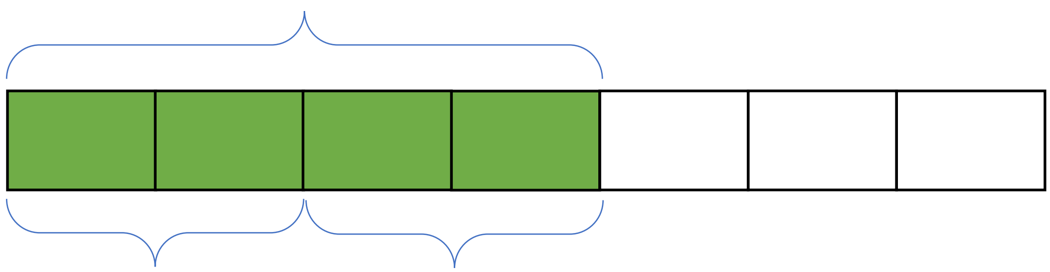
2) **Utilizar un modelo de barras (o diagrama de tiras de Singapur)**. Un estudiante podría empezar con una barra que represente los $\frac{4}{7}$ del jardín que el caracol ya ha atravesado. Observe que se parece al esquema anterior; ambos muestran $\frac{4}{7}$

Fracción del jardín ya atravesada



Aquí es donde la cosa se pone un poco más complicada. El caracol recorrió esas cuatro cuadras en $\frac{2}{3}$ de una hora. Un estudiante que entienda que las fracciones unitarias (aquellas cuyo numerador es 1) representan partes individuales, mientras que las fracciones no unitarias representan conjuntos de partes, puede razonar que esas cuatro cuadras se recorren en dos períodos de tiempo, cada uno equivalente $\frac{1}{3}$ de hora. En otras palabras, el caracol recorre dos bloques cada $\frac{1}{3}$ de hora o cada 20 minutos.

Fracción del jardín ya atravesada



$\frac{1}{3}$ de una hora
o 20 minutos

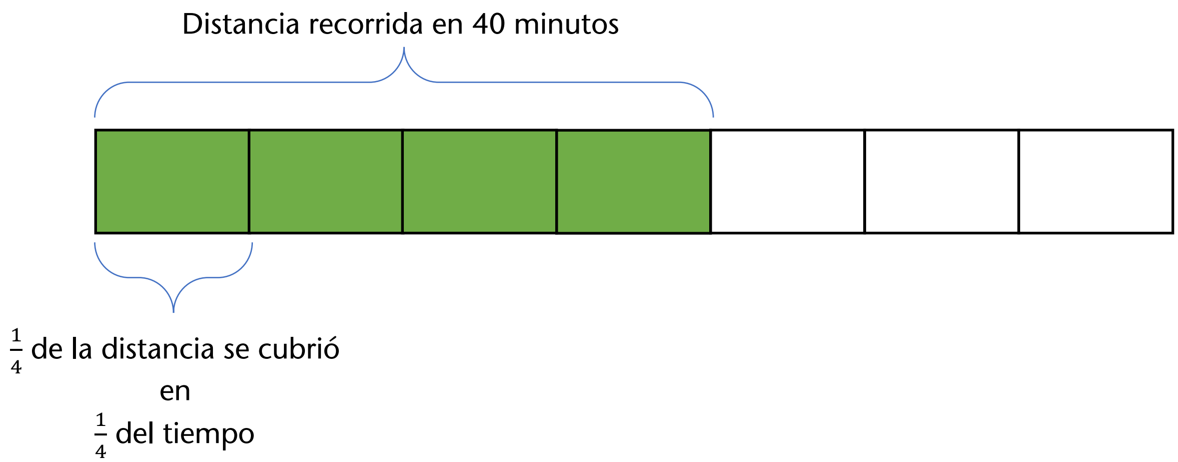
$\frac{1}{3}$ de una hora
o 20 minutos

Alternativamente, un estudiante podría razonar que $\frac{2}{3}$ de una hora son 40 minutos. Esto significa que el caracol recorre cuatro cuadras en 40 minutos. Con esta información, el estudiante puede calcular cuánto tarda en recorrer una sola cuadra y seguir desarrollando el razonamiento a partir de ahí.

(Busque aquí más información sobre el uso de modelos de barras para la resolución de problemas).

3) **Razonar proporcionalmente.** Esta tarea trata de algo que se mueve a un ritmo constante. En otras palabras, la distancia que recorre el caracol es proporcional a la cantidad de tiempo que lleva viajando. Un estudiante podría razonar que los 10 minutos que le faltan al caracol para llegar equivalen a una cuarta parte de los 40 minutos que ya

ha recorrido. Por lo tanto, en ese tiempo avanzaría una cuarta parte adicional de la distancia que ya ha recorrido. Calcular $\frac{1}{4}$ de $\frac{4}{7}$ de un jardín puede parecer complicado, pero al visualizar la imagen de $\frac{4}{7}$ como cuatro cuadras de un total de siete, se hace más fácil notar que $\frac{1}{4}$ de $\frac{4}{7}$ equivale a una cuadra.



PREGUNTA 7

Un caracol tarda $\frac{2}{3}$ de una hora en recorrer $\frac{4}{7}$ del camino a través de un jardín. Si sigue moviéndose en la misma dirección a la misma velocidad durante otros 10 minutos, ¿qué fracción del jardín habrá cruzado en total?

A. $\frac{6}{10}$

B. $\frac{26}{21}$

C. $\frac{8}{21}$

D. $\frac{5}{7}$

E. $\frac{6}{7}$

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque :

PREGUNTA 8

Dericia tiene una tienda de ***souvenirs***. Hizo este gráfico para mostrar el desglose de las ventas que hizo en marzo. ¿Cuál es la medida del ángulo central de la sección del gráfico marcado como tazas ("mugs")?

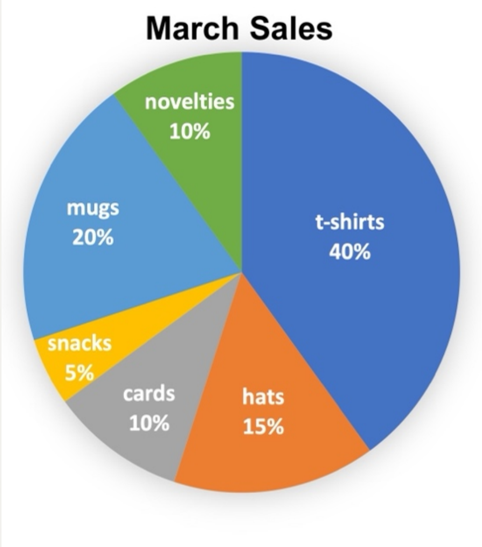
A. 20°

B. 40°

C. 72°

D. 80°

E. 200°



Comprensión básica necesaria

Los estudiantes deben comprender el significado de un ángulo y tener algunos puntos de referencia de ángulos como 180° y 90°. Los estudiantes deben comprender que el 100% significa el todo.

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

1) **¡Estimar!** Familiarizarse con los tamaños de los ángulos, especialmente relacionándolos con cosas que los estudiantes conocen en el mundo real, preparará bien a los estudiantes para eliminar respuestas poco razonables sin necesidad de realizar ningún cálculo. Un estudiante que puede calcular a ojo un ángulo de 90° evaluará rápidamente que el ángulo de la sección de tazas es menor que 90° pero no mucho menor. ¿Cuánto menos? Es difícil saberlo, pero reducir a solo dos opciones de respuesta el tiempo que se tarda en calcular a ojo un ángulo de 90° es una victoria en una situación de examen. (72° y 80° son las únicas opciones que pueden describirse razonablemente como un poco menos que 90°.)

2) **Medir**. A los estudiantes no se les permite tener transportadores en el examen y es probable que esta pregunta se haga en una pantalla de computadora, pero los estudiantes aún pueden hacer un uso creativo de las herramientas que sí tienen. Cualquier estudiante que tenga un trozo de papel de borrador puede hacer una herramienta rápida para medir ángulos arrancando una esquina del papel y sosteniéndola contra la pantalla. Eso mostrará rápidamente cómo se compara el ángulo con 90°. Doblando la esquina por la mitad se obtiene una práctica referencia de 45°. (Esto no pretende ser un "truco" para hacer exámenes. En general, llevar los ángulos al mundo real conectándolos con cosas que los estudiantes conocen incrementa su comprensión y los prepara para el examen al mismo tiempo. Conectar los ángulos con objetos reales puede ayudar a los estudiantes a evitar caer en la trampa de confundir el porcentaje de la sección con la medida del ángulo).

Nota: Arrancando la esquina de un trozo de papel se obtiene una referencia práctica para 90°. Doblándolo por la mitad se obtienen 45°.

3) **Adivinar y comprobar.** Un buen seguimiento de la estimación ya sea a ojo o con una referencia hecha a mano, es utilizar el método de adivinar y comprobar para reducir esas dos opciones restantes a una sola correcta. Un estudiante podría razonar así, añadiendo en grupos de 20% hasta llegar al 100%:

Si el 20% es 80°, entonces…	**Si el 20% es 72°, entonces…**
El 40% será de 160	El 40% será de 144
El 60% será de 180	El 60% será de 216
El 80% será de 240	El 80% será 288
El 100% será 400	El 100% será de 360
¡Es demasiado! Un círculo completo son solo 360°.	***¡Así está bien!***

Hay otras formas de comprobar estas conjeturas. Una forma más rápida es multiplicar cada valor por 5 porque 20%× 5 = 100%. Lo importante es que los estudiantes apliquen sus conocimientos y comprendan de diversas maneras.

4) **Razonar proporcionalmente.** La estrategia de adivinar y comprobar es un ejemplo de razonamiento proporcional. He aquí otros enfoques de razonamiento proporcional que un estudiante podría adoptar ante esta tarea:

   a. Un estudiante podría razonar que si el 20% es $\frac{1}{5}$ del todo, entonces el ángulo debe ser $\frac{1}{5}$ de 360° . Podrían dividir 360° entre 5 para llegar directamente a la respuesta.

   b. Un estudiante podría establecer y resolver una proporción comparando el porcentaje con el todo y el ángulo con 360°:

$$\frac{20\%}{100\%} = \frac{?}{360°}$$

(¡Atención! La regla de tres no es el único método para resolver esta proporción. Existen diversas formas correctas de plantear esta proporción y múltiples estrategias de resolución que trascienden la aplicación de la regla de tres. Por ejemplo, en este montaje, un estudiante podría observar la relación de proporcionalidad directa entre los términos de la proporción izquierda, notando que el número de abajo es cinco veces mayor que el número de arriba y deducir que el ángulo debe ser cinco veces 360°).

PREGUNTA 8

Dericia tiene una tienda de ***souvenirs***. Hizo este gráfico para mostrar el desglose de las ventas que hizo en marzo. ¿Cuál es la medida del ángulo central de la sección del gráfico marcado como tazas ("mugs")?

A. 20°

B. 40°

C. 72°

D. 80°

E. 200°

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 9

Una vuelta alrededor de un estanque es $\frac{2}{3}$ de una milla. ¿Cuántas vueltas se necesitan para correr 4 millas?

A. $\frac{2}{3}$

B. 4

C. $\frac{2}{3}$

D. 6

E. 8

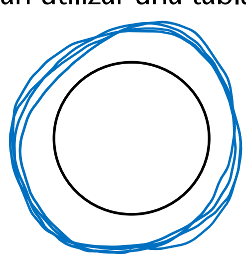
Comprensión básica necesaria

Los estudiantes deben comprender el significado de una fracción. No es necesario que hayan memorizado los procedimientos de las operaciones con fracciones

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

1) **¡Estimar!** La estimación es siempre un buen punto de partida. Aunque la aproximación no siempre proporcione al estudiante la precisión suficiente para discernir entre las opciones de respuesta, el proceso de estimación le obliga a ir más despacio y a dar sentido a la pregunta. No se puede estimar una respuesta si no se entiende la pregunta. Los estudiantes acostumbrados a estimar tendrán menos probabilidades de entrar en pánico y limitarse a hacer la primera operación que se les ocurra con los números que vean. En este caso, estamos buscando el número de vueltas necesarias para correr cuatro millas. Un estudiante podría deducir que, si una vuelta alrededor del estanque era menos de una milla, cuatro vueltas serían menos de cuatro millas. ¡Eso elimina enseguida dos opciones de respuesta! El estudiante podría estimar que, dado que una vuelta completa es aproximadamente una milla, la respuesta es más de cuatro pero probablemente no el doble.

2) "**Actuarlo**" (representar mediante la actuación). El contexto de esta pregunta es bastante sencillo. Un estudiante que se presenta a un examen no puede levantarse e ir a buscar un pequeño estanque para correr alrededor con un podómetro, pero puede hacer un dibujo del mismo, trazando vueltas alrededor del estanque hasta que haya trotado cuatro millas. Podrían utilizar una tabla para llevar la cuenta de la distancia total de esta forma.



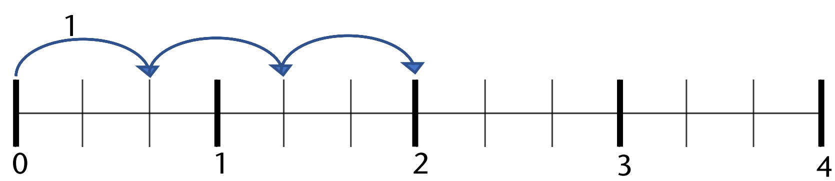
Vueltas	Carrera de distancia
1	$\frac{2}{3}$ millas
2	$1\frac{1}{3}$ millas
3	2 millas

⋮

O podría llevar la cuenta del total trotando de esta manera:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}}_{1\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}}_{2} + \frac{2}{3}}_{2\frac{2}{3}} \ldots$$

O podrían enderezar la ruta y llevar la cuenta de ella en una recta numérica:



¡Hay muchas formas de representar las matemáticas sobre el papel! (Puede que el dibujo garabateado de las vueltas alrededor del estanque no le parezca necesario para responder a la pregunta y puede que ***no lo sea***, pero hacer un esbozo puede ser una buena forma de introducir una pregunta si no sabe qué otra cosa hacer. Ayuda a asentar su pensamiento en el contexto y a calmar el pánico inducido por los problemas matemáticos).

3) **Razonar proporcionalmente**. Un estudiante que comienza a "modelar" la situación, podría observar que 2 millas equivalen a 3 vueltas y darse cuenta de que puede saltar hacia delante. Si 2 millas suponen 3 vueltas alrededor del estanque, 4 millas deberían suponer el doble ya que ¡4 millas es el doble de distancia!

4) **Dividir utilizando un modelo de tiras de Singapur (modelo de barras).** Aunque los enfoques que hemos visto hasta ahora se basaban sobre todo en la suma repetida, esta pregunta también puede interpretarse como una tarea de división: ¿cuántos grupos de $\frac{2}{3}$ de milla hay en 4 millas? Con un diagrama de tiras de Singapur que muestre cuatro millas divididas en tercios, un estudiante puede colorear y contar los grupos. Dos bloques representan una vuelta:

Vuelta 1	**Vuelta 1**	**Vuelta 2**	**1 milla**
Vuelta 2	**Vuelta 3**	**Vuelta 3**	**1 milla**
Vuelta 4	**Vuelta 4**	**Vuelta 5**	**1 milla**
Vuelta 5	**Vuelta 6**	**Vuelta 6**	**1 milla**

PREGUNTA 9

Una vuelta alrededor de un estanque es $\frac{2}{3}$ de una milla. ¿Cuántas vueltas se necesitan para correr 4 millas?

A. $2\frac{2}{3}$

B. 4

C. $4\frac{2}{3}$

D. 6

E. 8

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 10

En una bolsa hay 8 canicas rojas y 4 azules. Si eliges una canica sin mirar, ¿cuál es la probabilidad de que elijas una canica azul?

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

E. $\frac{2}{1}$

Comprensión básica necesaria

La comprensión de la probabilidad por parte de los estudiantes debe incluir los significados de estas probabilidades:

Imposible - la probabilidad es 0 o 0%.

Improbable - la probabilidad es una pequeña fracción o porcentaje (más de 0 pero menos de la mitad)

Tan probable como no - la probabilidad es la ½ o 50%

Probable - la probabilidad es una fracción grande o un porcentaje (más de la mitad, pero menos de 1)

Cierto - la probabilidad es 1 o 100%

Los estudiantes ***no*** necesitan saber fórmulas o procedimientos de probabilidad para empezar a pensar en esta pregunta.

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

1) **¡Estimar!** Ser deliberado al estimar es una forma de desarrollar el hábito de comprender una pregunta antes de recurrir a la calculadora o una fórmula. En este caso, la estimación tiene un valor incalculable porque hay varias respuestas erróneas muy tentadoras para el estudiante que tiene prisa. Un estudiante que se detiene a reflexionar sobre la pregunta y hacer una estimación pronto se dará cuenta rápidamente de que, como hay menos canicas azules que rojas en la bolsa, es menos probable sacar una canica azul que una canica roja. Esto significa que la probabilidad de sacar una canica azul debe ser inferior a la mitad, lo que deja al estudiante con solo dos opciones.

2) **Jugar a "¿y si...?"** Un estudiante que haya empezado con buen pie con una estimación podría evaluar las dos opciones de respuesta razonables preguntándose: "¿Y si...?" ¿Y si la probabilidad de sacar una canica azul fuera $\frac{1}{4}$? ¿Qué significaría eso? Significaría que,

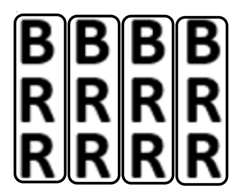
si jugara muchas veces, esperaría sacar una canica azul alrededor de $\frac{1}{4}$ de las veces. ¿Tiene eso sentido con lo que sé sobre las canicas de la bolsa? Mirando lo que hay, ¿esperaría sacar una canica azul aproximadamente una de cada cuatro veces o más bien una de cada tres?

Esta línea de pensamiento requiere entender un concepto básico de probabilidad: la probabilidad nos indica lo que podemos esperar si realizamos algo muchas veces. Aunque las cosas que son improbables ***pueden*** suceder, normalmente no lo hacen. Por otro lado, aunque las cosas probables ***pueden*** no suceder, por lo general sí ocurren. ¿Le gustaría que sus estudiantes adquieran esta comprensión mientras refuerzan sus fracciones y porcentajes de referencia? Entonces, eche un vistazo a ¿Lloverá mañana?, una lección completa y contextualizada del Centro SABES de matemáticas y aritmética.

3) **Hacer un dibujo y formar grupos** Aunque la pregunta dice que se supone que debe sacar una canica de la bolsa sin mirar, el estudiante que quiera hacerse una idea visual de la situación puede hacerlo haciendo un dibujo sencillo utilizando letras para representar las canicas y hacer grupos como éste:

   En esta imagen, cada grupo tiene solo un color de canicas y todos los grupos son del mismo tamaño. ¿Cómo ayuda esto a comprender la probabilidad? Hay tres grupos iguales y solo uno de ellos es azul. En otras palabras, uno de cada tres grupos es azul, lo que significa que puede esperar sacar una canica del grupo azul aproximadamente $\frac{1}{3}$ de las veces.

4) **Hacer un dibujo diferente: formar grupos diferentes.** He aquí otra forma útil de visualizar las canicas. Para hacer este dibujo, un estudiante podría empezar dibujando las cuatro canicas azules cada una en la parte superior de una columna y luego, podría rellenar las ocho canicas rojas de debajo, manteniendo las columnas iguales a medida que avanza.



   En esta imagen, hay cuatro grupos que parecen ser iguales. Cada uno tiene una canica azul y dos canicas rojas. En otras palabras, una de cada tres canicas de la bolsa es azul. Aunque la fracción o probabilidad $\frac{1}{3}$ era difícil de leer en la pregunta, es mucho más clara al observar las imágenes.

PREGUNTA 10

En una bolsa hay 8 canicas rojas y 4 azules. Si eliges una canica sin mirar, ¿cuál es la probabilidad de que elijas una canica azul?

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

E. $\frac{2}{1}$

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 11

¿Cuál es el valor de x en la ecuación

$$\frac{2}{3} = \frac{x+3}{15}$$

A. 2

B. 5

C. 7

D. 10

E. 12

Comprensión básica necesaria

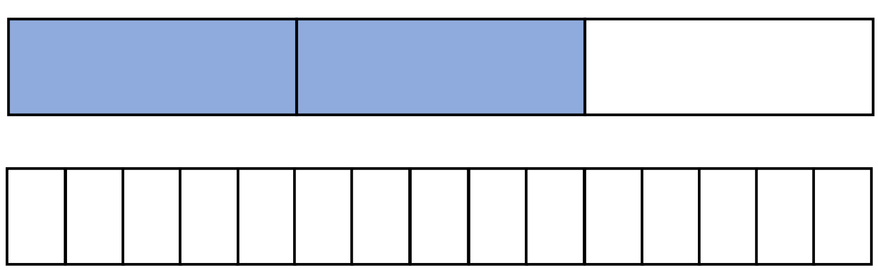
Los estudiantes deben tener los dos conocimientos siguientes sobre las variables y las ecuaciones:

1) Una ecuación se considera "verdadera" cuando el valor de ambos lados del signo de igualdad es el mismo. No es una idea simple de entender. Muchos estudiantes tienen la concepción equivocada de que el signo de igualdad significa "haz el cálculo y pon la respuesta al otro lado".

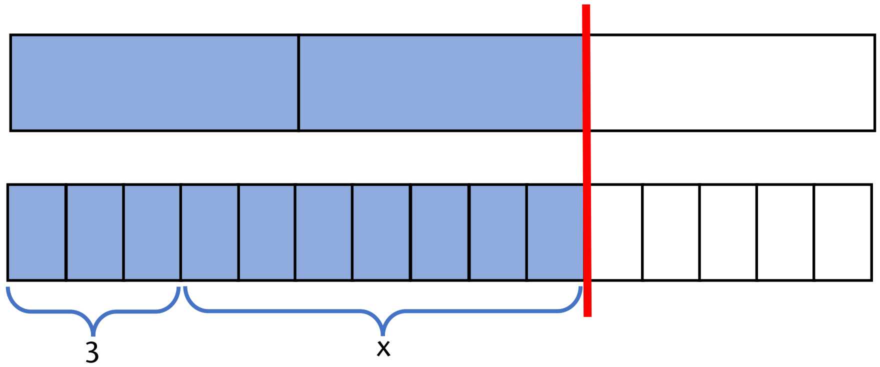
2) La letra de la pregunta anterior (x) representa un número; hay un número por el que se puede sustituir x que hará que la ecuación sea cierta. Los estudiantes pueden empezar pronto a sentirse cómodos con el uso de letras para representar números plasmando sus propias generalizaciones en una notación más formal. Por ejemplo, un estudiante que entiende el perímetro de un rectángulo como el doble de la longitud más el doble de la anchura puede aprender a expresar esa relación como una ecuación con variables: $P = 2 \times l + 2 \times w$.

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

1) **Visualizar fracciones equivalentes con modelos de barras.** Esta pregunta parece referirse a dos fracciones equivalentes, aunque una de ellas tiene un numerador poco común. Dejando de lado esa preocupación por un momento, un estudiante podría intentar entender la ecuación dibujando la fracción $\frac{2}{3}$ y comparándola con un modelo que muestre quinceavos:



Dado que el signo de igualdad indica que los valores de ambos lados deben ser iguales, el número 15 debe ser tal que ambas fracciones sean equivalentes. El número 15 es igual a x más 3 (x + 3), por lo que un estudiante podría contar tres bloques en la parte inferior y luego ver que el número restante de bloques corresponde al valor de x.



2) **Razonar sobre fracciones equivalentes multiplicando el numerador y el denominador por el mismo número.** Los estudiantes que han desarrollado una comprensión conceptual de las fracciones equivalentes trabajando con modelos concretos y visuales (como los modelos de barras anteriores) pueden razonar de forma más abstracta de este modo:

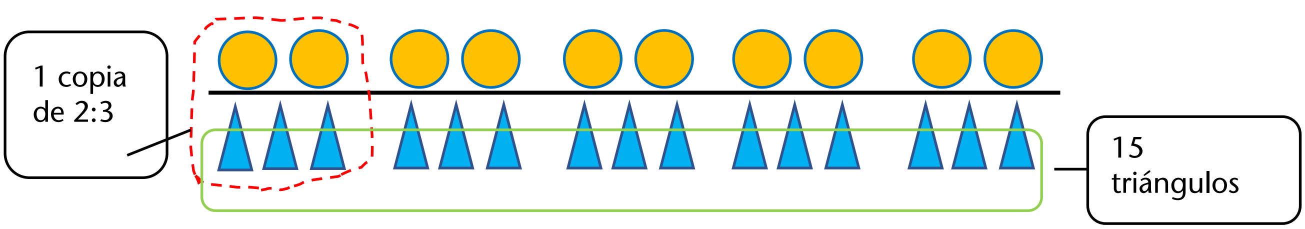
Multiplicar

$$\frac{2}{3} = \frac{x+3}{15}$$

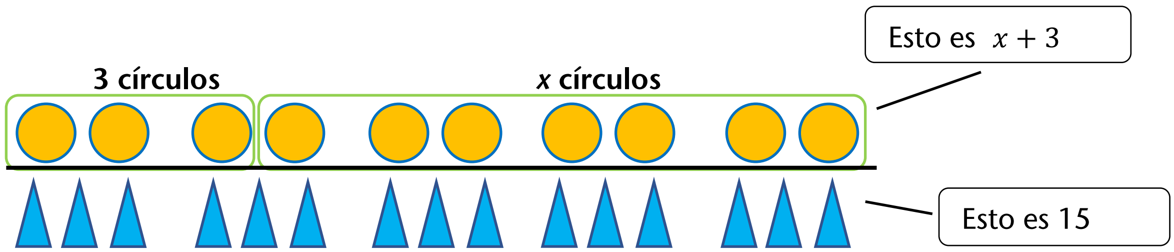
Multiplicar

Esto significa que el valor de la expresión encerrada en un círculo debe ser 10. En este punto, un estudiante podría preguntarse, “¿qué número puedo sumar a 3 para obtener 10?” Ese debe ser el valor de x que hace que la ecuación sea cierta.

3) **Razonar sobre proporciones equivalentes haciendo copias de las proporciones.** Un estudiante podría ver esta ecuación como un enunciado sobre proporciones equivalentes en lugar de fracciones equivalentes, lo que abriría otra vía de razonamiento. El estudiante podría hacer copias de una proporción de 2 a 3 hasta obtener una proporción de algo a 15:



Como en el primer planteamiento, el número de círculos es x y 3 más, por lo que los círculos pueden colocarse en dos grupos: uno con 3 círculos y otro con x círculos.



PREGUNTA 11

¿Cuál es el valor de x en la ecuación

$$\frac{2}{3} = \frac{x+3}{15}$$

A. 2

B. 5

C. 7

D. 10

E. 12

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 12

¿Qué porcentaje de la superficie rectangular del parque que se muestra a continuación ocupa la zona cuadrada de juegos infantil?

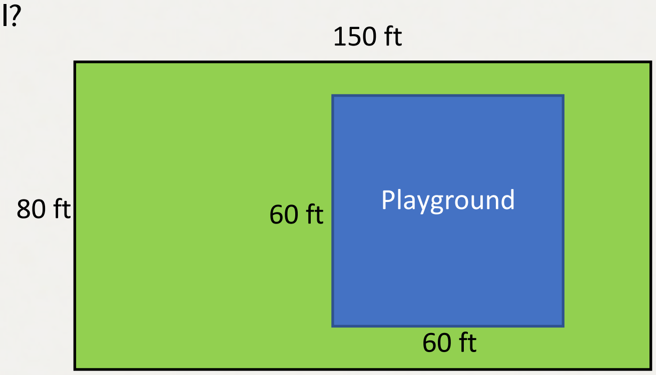
A. 12%

B. 30%

C. 36%

D. 40%

E. 75%



Comprensión básica necesaria

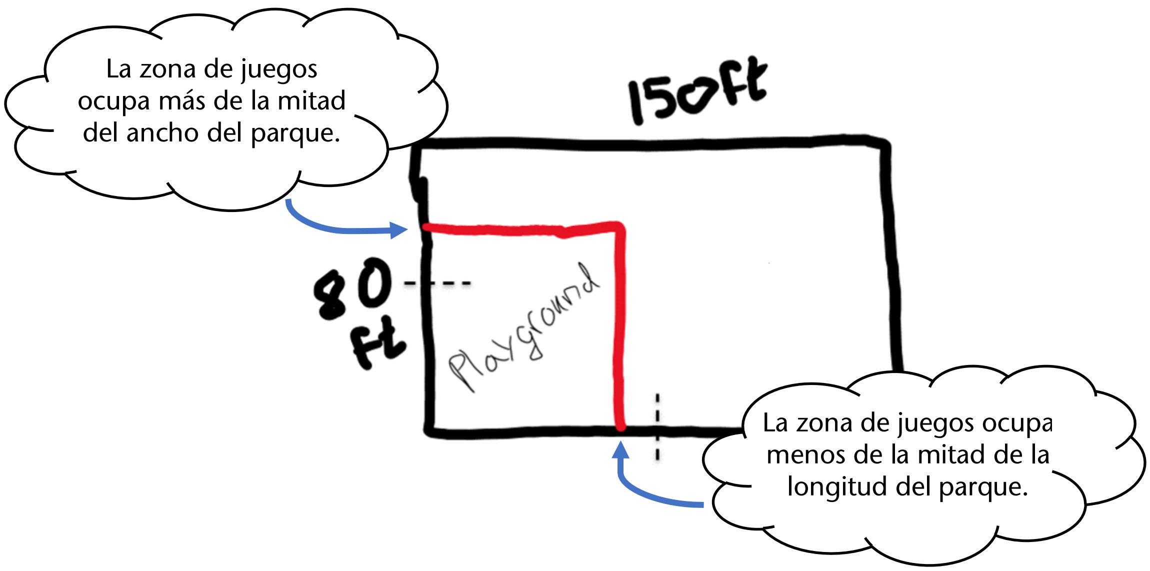
Los estudiantes deben comprender el significado de área y sentirse cómodos con algunos porcentajes de referencia como el 50% y el 25%.

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

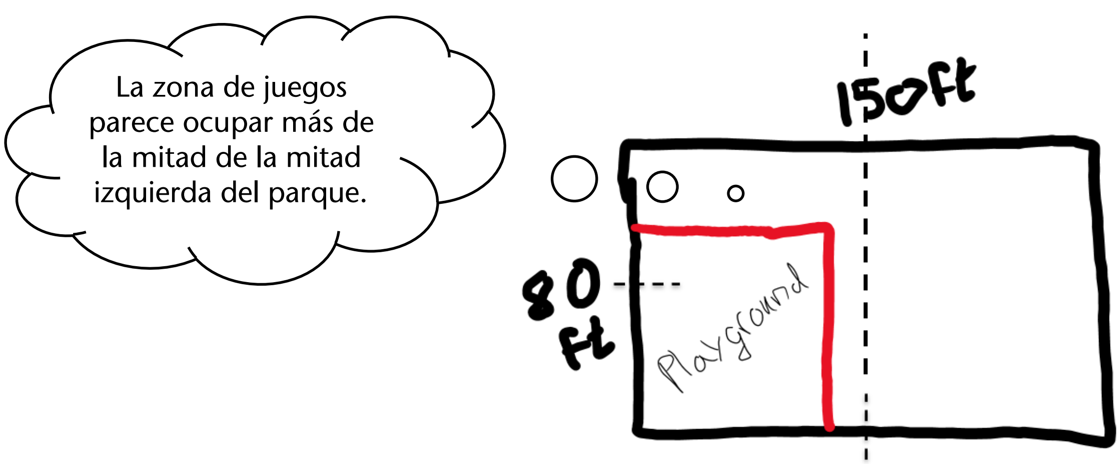
1) **¡Estimar!** Un estudiante puede ser capaz de estimar el porcentaje de superficie que ocupa el área de juegos a simple vista. ¿Qué parte del parque ***parece*** ocupar el área de juegos? Es difícil de decir debido a que el área de juegos no está centrada ni alineada con ninguno de los bordes del parque, pero aun así un estudiante podría eliminar una o dos opciones de respuesta incluso con un vistazo rápido.

Nota: Los diferentes exámenes tienen distintas convenciones sobre cómo dibujar diagramas a escala. Sus estudiantes deben saber, antes de un examen, si pueden esperar que los diagramas estén a escala ***y*** deben tener acostumbrarse a preguntarse si las medidas parecen razonables antes de hacer una estimación basada en un diagrama. En este caso, la longitud marcada 80 pies parece ser más de la mitad de la longitud marcada de 150 pies y las longitudes marcadas de 60 pies parecen ser iguales y menores que la longitud marcada de 80 pies, por lo que es razonable hacer una estimación basada en este diagrama).

2) **Esbozar un nuevo diagrama para obtener una mejor estimación.** Un estudiante que note que la ubicación de la zona de juegos dificulta ver claramente qué fracción del parque ocupa podría redibujar el diagrama para colocar la zona infantil en un lugar más conveniente. Un esbozo utilizando algunas fracciones de referencia podría facilitar la estimación.



A partir de este dibujo, el estudiante puede hacer una estimación con la que se sienta más seguro, deduciendo que la zona de juegos es definitivamente menos de la mitad del área de todo el parque, aunque parece ser más de la mitad de la mitad izquierda del parque (o parece ser más de la cuarta parte del área porque la cuarta parte es la mitad de la mitad). Consulte el diagrama siguiente si esta última frase le ha resultado confusa. A partir de aquí, un estudiante podría eliminar cualquier opción de respuesta que sea más de la mitad (opción de respuesta **E**) o menos de una cuarta parte (opción de respuesta **A**). Incluso, podrían afinar su estimación y eliminar más opciones considerando cuánto menos del 50% o cuánto más del 25% del parque parece ser ahora el área de juegos.

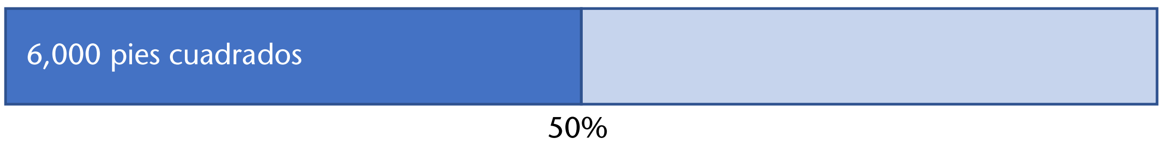


3) **Calcular las áreas y estimar con puntos de referencia.** Un estudiante podría calcular las áreas de la zona de juegos y del parque y utilizar puntos de referencia para estimar el porcentaje del parque que ocupa la zona de juegos. El área de la zona de juegos es de 60 pies × 60 pies = 3,600 pies cuadrados. El área del parque es de 80 pies × 150 pies =

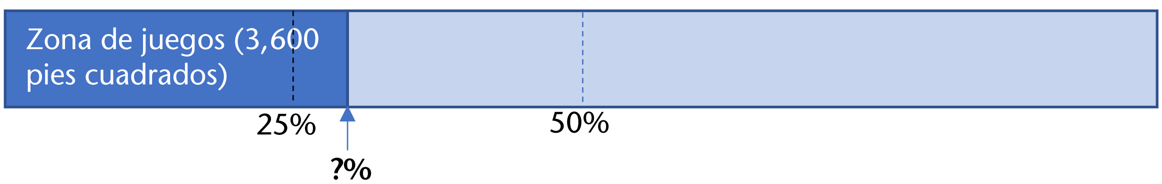
12,000 pies cuadrados. Un estudiante podría inferir sobre el porcentaje del parque ocupado por la zona de juegos de la siguiente manera:

Todo el parque tiene 12,000 pies cuadrados:

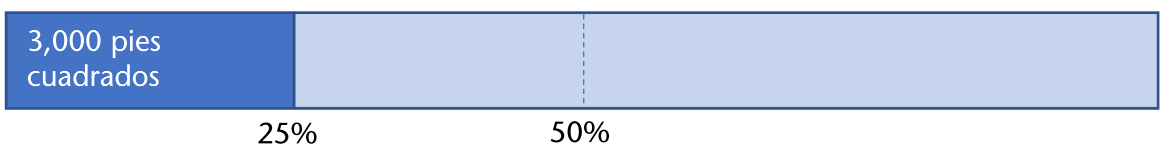
La mitad (o el 50%) del parque tiene 6,000 pies cuadrados:



Una cuarta parte (o el 25%) del parque tiene 3.000 pies cuadrados:



La zona de juegos tiene más de 3,000 pies cuadrados, pero menos de 6,000 pies cuadrados. Está más cerca de los 3,000 pies cuadrados.



Este modelo es lo suficientemente bueno para una estimación bastante razonable. De hecho, puede ser lo suficientemente bueno para que un estudiante decida la opción de respuesta más razonable.

4) **Razonar sobre fracciones equivalentes.** Una estrategia para calcular porcentajes que a veces resulta conveniente consiste en crear fracciones equivalentes hasta que se obtiene una fracción cuyo denominador es 100. Como un tanto por ciento es un número de centésimas, reescribir la fracción como centésimas puede darle la respuesta.

Comenzando con la fracción $\frac{3,600}{12,000}$ un estudiante podría razonar que la fracción puede leerse como 36 centenas de 120 centenas y por lo tanto puede escribirse como $\frac{36}{120}$ porque son 36 cosas de 120 cosas. (En este caso, las "cosas" son centenas. Esta forma de pensar es más conceptual que la idea de "cancelar ceros", que a menudo se enseña como truco).

A partir de ahí, una forma de llegar a un denominador de 100 es en dos pasos más:

Dividir por   Multiplicar por

$$\frac{36}{120} = \frac{6}{20} = \frac{30}{100}$$

Dividir por   Multiplicar por

(Existen muchas otras formas de llegar a un denominador de 100. ¿Se le ocurren algunas alternativas? ¿Qué cree que podrían intentar sus estudiantes? A muchos estudiantes les gusta dividir los numeradores y los denominadores por 2. ¿Podría ser esa también una posible estrategia hacia la solución?)

PREGUNTA 12

¿Qué porcentaje de la superficie rectangular del parque que se muestra a continuación ocupa la zona cuadrada de juegos infantil?

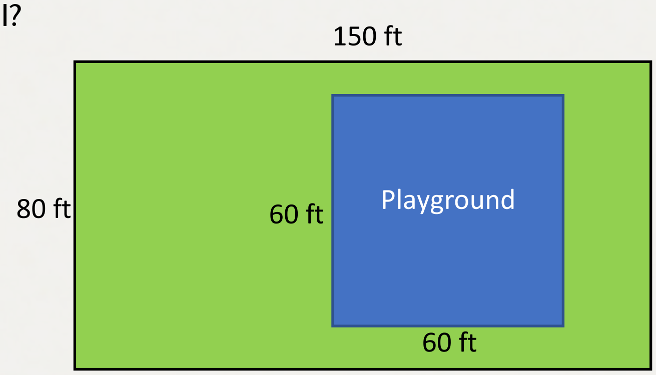
A. 12%

B. 30%

C. 36%

D. 40%

E. 75%



Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 13

Dorothy ha obtenido 83, 92, 85 y 94 puntos en sus cuatro primeros exámenes de este semestre. ¿Qué puntuación tiene que obtener en el quinto examen para tener un promedio de 90 en los cinco exámenes?

A. 88

B. 90

C. 92

D. 94

E. 96

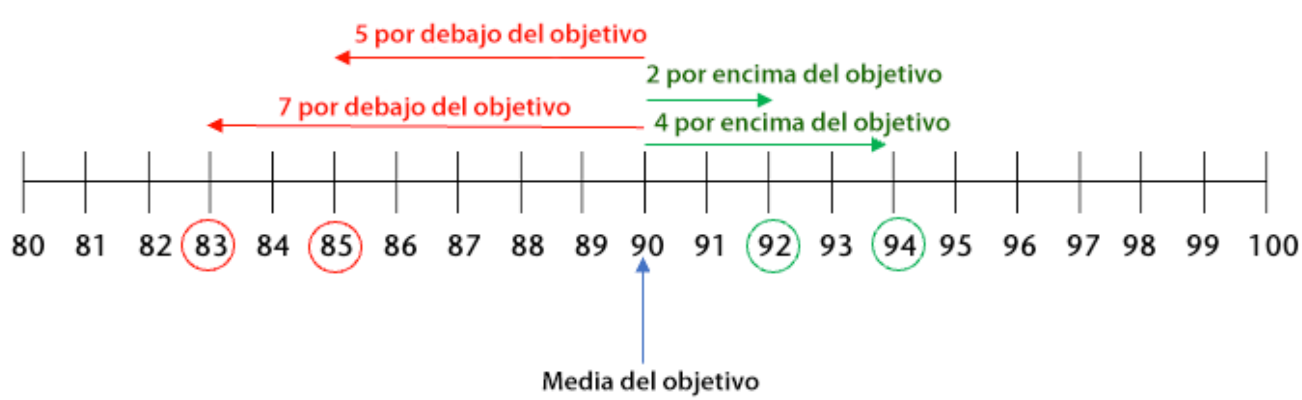
Comprensión básica necesaria

Los estudiantes deben comprender el significado de media (promedio). Pueden tener una o varias formas de hallar la media. En las estrategias que se presentan a continuación se utilizan varias formas diferentes de pensar sobre la media.

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

1) **¡Estimar!** La estimación suele ser un buen punto de partida para resolver preguntas en contextos del "mundo real". En este caso, un estudiante que entienda que la media representa una forma de identificar el "valor central" dentro de un conjunto de números podría empezar por evaluar informalmente cuál es la puntuación media actual de Dorothy. Ella tiene dos calificaciones que están por debajo de 90 y dos que están por encima, pero las más bajas se alejan más de 90 que las más altas. Esto sugiere que su puntuación media actual es menor que 90, por lo que probablemente necesitará una puntuación superior a 90 en su quinto examen para alcanzar su objetivo.

2) **Pensar en las distancias desde la media objetivo.** Una forma de entender la media como el centro de un conjunto es imaginarla como un punto de equilibrio, donde las diferencias entre los valores y la media se compensan a ambos lados. En una recta numérica, esto podría verse así:



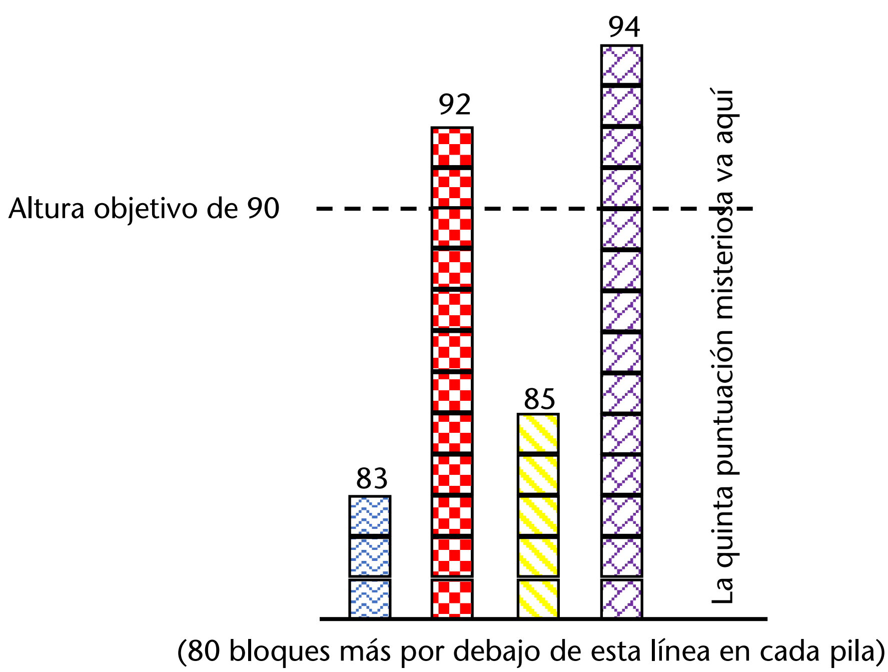
Al observar este diagrama, un estudiante puede notar que las flechas situadas por debajo de la media objetivo tienen un total mayor que la de las flechas que están por encima. ¿Qué flecha podría añadirse a la recta numérica para que el total menor que el objetivo fuera igual al total mayor que él? ¿Qué puntuación representaría?

Este razonamiento también podría hacerse en una tabla utilizando números con signos para denotar las distancias por encima y por debajo del objetivo:

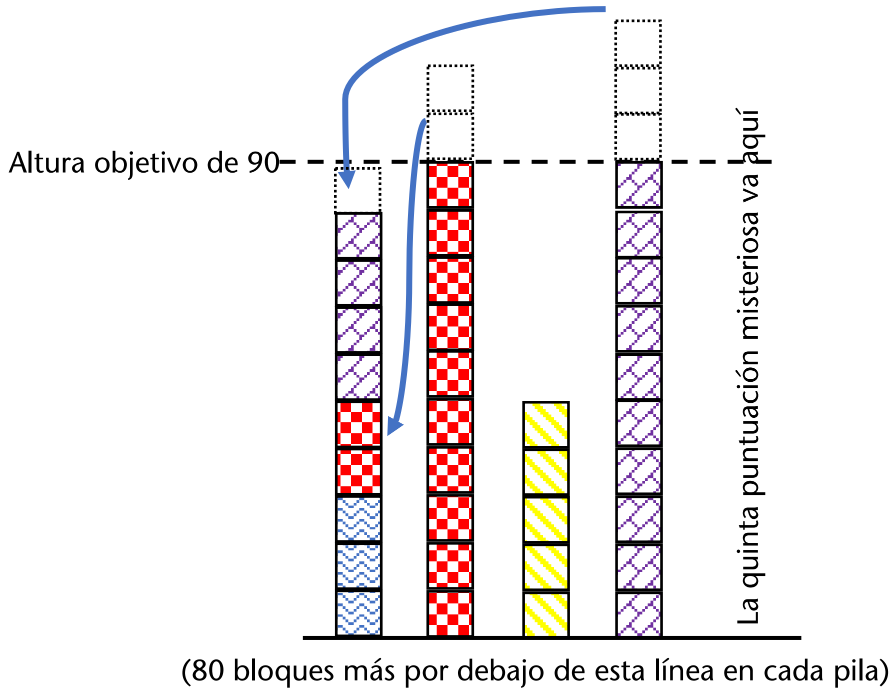
Puntuación	Distancia de la media del objetivo (90)
83	-7
92	+2
85	-5
94	+4
???	???

Para que 90 sea la media del conjunto, el total de todas las diferencias debe ser 0. ¿Qué quinta puntuación haría que eso fuera cierto?

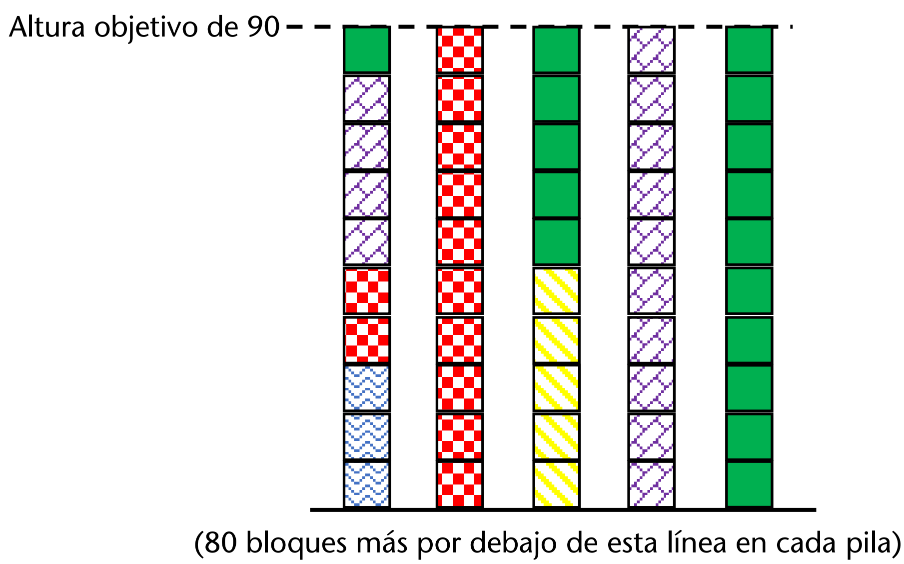
3) **Hacer montones iguales.** Otra forma útil de la media es verla como el valor que tendrían todas las puntuaciones si fueran. En otras palabras, Dorothy tendría una media de 90 si todas sus calificaciones fueran exactamente 90. Un estudiante podría imaginar las puntuaciones como pilas de bloques. Para simplificar la representación, estas ilustraciones solo muestran la parte superior de las pilas. A continuación, se presenta un modelo que muestra todas las puntuaciones de Dorothy suponiendo que cada pila tiene 80 bloques adicionales en la base.



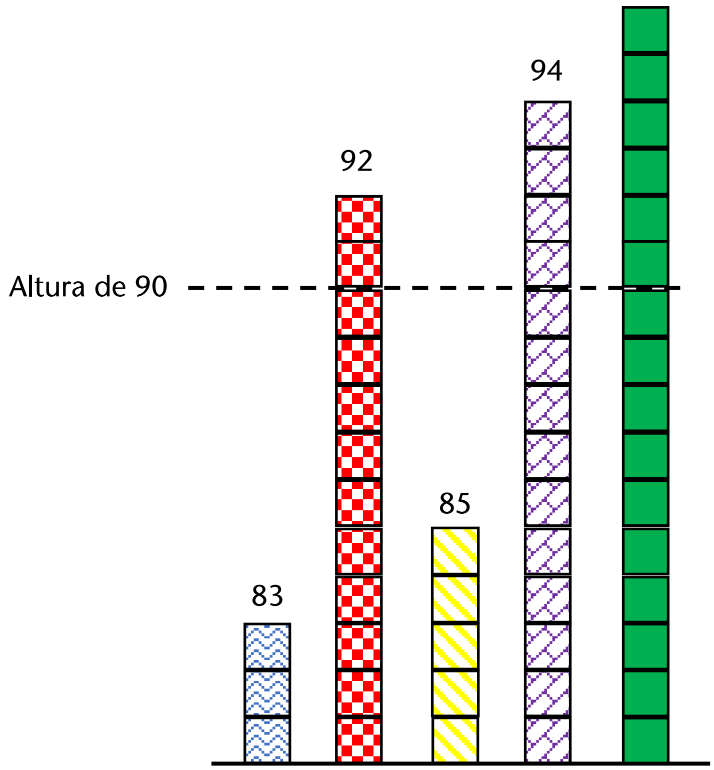
4) Aquí están de nuevo las puntuaciones, moviendo algunos de los bloques para intentar que cada uno de los montones tenga 90 bloques de altura.



Aún quedan algunos espacios por rellenar. Los bloques que utilicemos para rellenarlos formarán la quinta puntuación. He aquí un conjunto de puntuaciones que son todas 90 (por lo que la media es definitivamente 90). Los nuevos bloques (en verde sólido) son la quinta puntuación.



Aquí están las puntuaciones con todos los bloques de nuevo en sus montones adecuados:



(80 bloques más por debajo de esta línea en cada pila)

Esta forma de visualizar el problema puede parecer demasiado elaborada para un simple esbozo en un papel de borrador durante un examen. Sin embargo, los estudiantes que comprendan la media como el valor que tendría cada número si todos fueran iguales podrán resolver pregunta en el momento con bocetos mucho más sencillos y rápidos.

5) **Hallar el total.** Un estudiante podría considerar que, en el procedimiento estándar para hallar la media, sumamos todos los números y luego dividimos entre cuántos números había. Visualmente, podrían imaginar como reunir todas las puntuaciones en un solo (sumándolas) y luego repartirlas en la misma cantidad de grupos con las que se empezó, de modo que cada uno tenga el mismo tamaño (dividiendo entre el número total de puntuaciones). Como este grupo grande se puede dividir en 5 partes iguales de 90, el estudiante puede calcular cuánto mide su total. Dado que este grupo también representa la suma de las cinco calificaciones individuales, el estudiante puede determinar la calificación que conociendo las otras cuatro.

5 montones todos iguales (el tamaño de cada montón es la puntuación media)

1 montón grande (todos los puntos juntos)

5 montones diferentes (cada uno es una de las puntuaciones originales)

6) **Adivinar y comprobar.** Incluso cuando la pregunta no es de opción múltiple, la estrategia de “adivinar y comprobar” puede ser una buena estrategia para identificar un número desconocido. En un examen con opciones de respuesta, esta técnica es aún más efectiva, ya que el estudiante sabe que la respuesta debe ser una de las cinco opciones dadas. Sin embargo, una forma más eficiente de aplicarla es hacerlo con un enfoque basado en el ***conocimiento de causa***.

   En lugar de probar opciones al azar, los estudiantes deben comenzar con una estimación fundamentada y usarla como punto de partida. Luego, pueden utilizar los resultados de cada conjetura basándose en los resultados obtenidos en cada intento. Para un ejemplo detallado de esta estrategia aplicada a una pregunta similar, consulte In Defense of Guess-and-Check.

PREGUNTA 13

Dorothy ha obtenido 83, 92, 85 y 94 puntos en sus cuatro primeros exámenes de este semestre. ¿Qué puntuación tiene que obtener en el quinto examen para tener una puntuación media (promedio) de 90 en los cinco exámenes?

A. 88

B. 90

C. 92

D. 94

E. 96

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 14

Alicia trabaja en una tienda de electrodomésticos donde gana un salario base de $18.50 por hora más una comisión del 20% de los electrodomésticos que venda. La semana pasada trabajó 35 horas y vendió un lavavajillas por $600 y dos microondas por $400 cada uno. ¿Qué expresión representa sus ganancias totales de la semana?

A. $0.2\times 2\times (400 + 600) + 18{,}50$

B. $35(18.50) + 0.2(600 + 400)$

C. $35(18.50) + 0.2(600) + 0.2(400)$

D. $35(18.50) + 0.2(600 + 2\times 400)$

E. $35(18.50 + 600 + 2\times 400)$

Nota: Se trata de una variación de la pregunta 22 (Los electrodomésticos de Alicia). La situación es la misma, pero la pregunta se formula de una forma diferente.

Comprensión básica necesaria

Para responder esta pregunta (y otras similares en las que los estudiantes deben elegir la expresión correcta), los estudiantes deben entender que las expresiones matemáticas son una forma de representar el pensamiento. Así como hay maneras de abordar una pregunta, también existen varias expresiones correctas que representan la respuesta. Además, es importante que los estudiantes reconozcan que distintas expresiones pueden ser equivalentes y sepan leerlas e interpretarlas adecuadamente.

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

En esta pregunta, el debate que se presenta a continuación propone algunas distintas estrategias para enseñar y explicar las expresiones matemáticas, ayudando a los estudiantes a enfrentarse a preguntas como esta. Es recomendable pregunta del tipo "encuentre la expresión correcta" hasta que los estudiantes comprendan cómo las expresiones representan el pensamiento y se sientan cómodos trabajando con ellas. El planteamiento de esta pregunta (sin las opciones de respuesta) puede utilizarse como punto de partida para el aprendizaje de las expresiones algebraicas.

Para ayudar a los estudiantes a adquirir confianza y fluidez en la escritura y la interpretación de expresiones, puede pedirles a todos sus estudiantes que creen sus propias expresiones para representar las ganancias de Alicia. Esto permitirá reunir una variedad de expresiones ***diferentes*** y fomentar la comprensión del concepto.

Un estudiante podría razonar sobre los ingresos de Alicia de esta manera:

En primer lugar, calcularé sus ingresos a partir de su salario por hora, es decir, $18.50 x 35 ya que trabajó 35 horas a $18.50 la hora.

Luego, calcularé su comisión por el lavavajillas, que es $\frac{1}{5}$ de $600, ya que el 20% es lo mismo que $\frac{1}{5}$.

Entonces calcularé su comisión por uno de los microondas. Eso es $\frac{1}{5}$ de $400.

Como vendió dos microondas, volveré a añadir esa última cifra para el segundo microondas.

Este razonamiento se puede expresar mediante una expresión por partes, reflejando el mismo de pensamiento del estudiante. (Utilizar colores para resaltar cómo cada parte de la expresión se relaciona con el razonamiento verbal puede ayudar a conectar la notación simbólica con la idea que representa. Para los estudiantes que no distinguen los colores, se pueden utilizar otras estrategias, como subrayar o en un círculo las diferentes secciones de la expresión).

Razonamiento	Trozo de expresión
En primer lugar, calcularé sus ingresos a partir de su salario por hora, es decir, $18.50 x 35 ya que trabajó 35 horas a $18.50 la hora.	$18.\times\ 35$
Luego calcularé su comisión por el lavavajillas, que es $\frac{1}{5}$ de $600, ya que el 20% es lo mismo que $\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{5} \times 600$
Entonces calcularé su comisión por uno de los microondas. Eso es $\frac{1}{5}$ de $400.	$\frac{1}{5} \times 400$
Como vendió dos microondas, volveré a añadir esa última cifra para el segundo microondas.	$\frac{1}{5} \times 400$

En conjunto, la expresión luce así:

$$18.50 \times 35 + \frac{1}{5} \times 600 + \frac{1}{5} \times 400 + \frac{1}{5} \times 400$$

O así, si el estudiante opta por utilizar paréntesis para ser más claro sobre cómo se fragmenta el pensamiento (una práctica que no siempre es necesaria, pero que puede ser útil):

$$(18.50 \times 35) + \left(\frac{1}{5} \times 600\right) + \left(\frac{1}{5} \times 400\right) + \left(\frac{1}{5} \times 400\right)$$

De este modo, el estudiante ha utilizado la notación matemática para contar un relato de su pensamiento.

Otro estudiante podría razonar de forma diferente sobre los ingresos de Alicia:

En primer lugar, calcularé el total de ventas que realizó: $600 por el lavavajillas y 2× $400 por los dos microondas.

Entonces, calcularé el 20% de sus ventas totales multiplicando las ventas totales por 0.2.

Calcularé cuánto ganó de su salario por hora multiplicando las horas por el salario, así que son 35× $18.50.

Traducir este razonamiento a una expresión podría ser algo así. El estudiante podría empezar escribiendo su primer paso como:

$$600 + 2 \times 400$$

Luego continúe multiplicando eso por 0.2 para obtener:

$$0.2(600 + 2 \times 400)$$

Y finalmente añadir el resultado del tercer cálculo para obtener:

$$0.2(600 + 2 \times 400) + 35 \times 18.50$$

Pedir a los estudiantes que compartan su razonamiento y las expresiones algebraicas que han utilizado puede generar un momento de ¡Ajá! Aunque solo hay una respuesta correcta sobre la cantidad que ganó Alicia, existen múltiples formas de llegar a ella, y diferentes notaciones matemáticas pueden representar el mismo valor final. En otras palabras, ***expresiones diferentes pueden ser equivalentes***, lo que es un principio clave de lo que muchos identifican como "hacer álgebra").

En esta lección se explora cómo leer una expresión y entender la historia que cuenta. Pida a sus estudiantes que intercambien expresiones e intenten descifrar el razonamiento de sus compañeros. Esto requiere práctica, pero el ciclo de escribir expresiones para registrar pensamientos, reconocer que las expresiones pueden ser equivalentes y leer expresiones con el objetivo de comprender la historia que narran puede repetirse muchas veces en diferentes contextos, niveles y ámbitos. Por ejemplo, los estudiantes pueden encontrar múltiples formas distintas de expresar el perímetro de un rectángulo y practicar cómo conectar distintas fórmulas y diferentes enfoques sobre el perímetro. (Para ver una lección que aborda el perímetro de este modo y lo vincula con el uso de variables en expresiones en los primeros niveles, consulte la Unidad 1, Lección 4 - Comprender el perímetro con fórmulas del Plan de estudios para adultos que aprenden matemáticas (CALM) en https://www.terc.edu/calm.)

Al finalizar una lección (o varias) como esta, utilizar preguntas tipo test, como la que se presenta ahora con opciones de elección múltiple, puede ser una excelente oportunidad para que los estudiantes practiquen la lectura de expresiones comprendan las historias que cuentan. Las respuestas incorrectas también cuentan historias, aunque equivocadas. Por ejemplo, un estudiante podría leer la opción de respuesta **(C)**$35(18.50) + 0.2(600) + 0.2(400)$ y darse cuenta de que está relatando la historia de una semana en la que Alicia vendió el lavavajillas pero solo ***un*** microondas. Esta podría ser una excelente actividad de ampliación: tratar de averiguar qué historia cuenta cada opción de respuesta y si tiene sentido. Por ejemplo, la opción de respuesta **(E)**$35(18.50 + 600 + 2 \times 400)$ suma la tarifa por hora de Alicia y el valor de los artículos que vendió y luego multiplica todo eso por el número de horas trabajadas. Esta historia sugiere que Alicia gana \$18.50 más el valor de todos los artículos que vende ***cada hora que trabaja,*** lo cual no tiene ningún sentido.

Dos notas sobre preguntas de examen en las que se pide a los estudiantes que elijan la expresión correcta:

1) ***No son*** problemas fáciles. A menos que un estudiante tenga la suerte de pensar en la situación exactamente igual que quien diseñó el problema, es probable que no encuentre su expresión entre las opciones de respuesta. Esto puede generar mucha ansiedad durante el examen. Los estudiantes tienen que estar seguros de que comprenden que hay múltiples expresiones correctas posibles para evitar llegar a la conclusión errónea de que su razonamiento es incorrecto sólo porque no ven su respuesta entre las opciones. Es importante no darles a los estudiantes la impresión de que estos problemas son fáciles, ya que es necesario examinar cuidadosamente cada opción de respuesta. El hecho de que sea una pregunta de opción múltiple no implica que sea rápida y fácil de resolver.

2) Existe una estrategia para realizar el examen que puede marcar la diferencia en una pregunta como esta. Es valioso que los estudiantes cuenten con esta estrategia para el examen, pero no debe sustituir el aprendizaje riguroso mencionado anteriormente. Los estudiantes pueden evitar la dificultad de comprender el significado de cada expresión respondiendo a la pregunta con un número (como las ganancias reales de Alicia) y luego evaluando después cada expresión para averiguar cuál da la respuesta correcta. Esta estrategia no es necesariamente más rápida, pero es bastante fiable. Sin embargo, no es útil una vez terminado el examen, a diferencia de la capacidad de escribir y leer expresiones, que es crucial para avanzar en álgebra y más allá.

Para una excelente actividad y colección de recursos relacionados que desarrollen las habilidades y conocimientos mencionados aquí, eche un vistazo a El problema de los bordes en CollectEdNY.

PREGUNTA 14

Alicia trabaja en una tienda de electrodomésticos donde gana un salario base de $18.50 por hora más una comisión del 20% de los electrodomésticos que venda. La semana pasada trabajó 35 horas y vendió un lavavajillas por $600 y dos microondas por $400 cada uno. ¿Qué expresión representa sus ganancias totales de la semana?

A. 0.2× 2× (400 + 600) + 18,50

B. 35(18.50) + 0.2(600 + 400)

C. 35(18.50) + 0.2(600) + 0.2(400)

D. 35(18.50) + 0.2(600 + 2× 400)

E. 35(18.50 + 600 + 2× 400)

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 15

Un carámbano crece a un ritmo de $\frac{2}{5}$ de pulgada por minuto. ¿Cuánto crecerá el carámbano en $2\frac{1}{2}$ horas?

A. 5 pulgadas

B. $12\frac{1}{2}$ pulgadas

C. 50 pulgadas

D. 60 pulgadas

E. 150 pulgadas

Comprensión básica necesaria

Los estudiantes deben comprender el significado de una fracción y ser capaces de representar una en una recta numérica o con un diagrama. También, deben comprender el concepto de tasa.

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

1) **Estimar.** No es fácil dar sentido a una tasa como $\frac{2}{5}$ de pulgada por minuto, pero un estudiante que tenga un gran sentido de las fracciones de referencia puede razonar que $\frac{2}{5}$ es un poco menos que $\frac{1}{2}$ (porque 2 es un poco menos que la mitad de 5). Sabiendo que el carámbano crece a un ritmo de un poco menos de la mitad de una pulgada cada minuto, un estudiante puede razonar que crece un poco menos de 1 pulgada cada 2 minutos. $2\frac{1}{2}$ horas son 150 minutos, por lo que el carámbano crecería algo menos de 1 pulgada 75 veces (porque 150 minutos son 75 grupos de 2 minutos).

2) **Dar pequeños pasos**. Conocer la tasa de crecimiento por minuto significa que sabemos cuánto crece el carámbano ***cada*** minuto. Un estudiante podría hacer una tabla para llevar la cuenta del crecimiento del carámbano minuto a minuto:

Minutos	Crecimiento en pulgadas
1	$\frac{2}{5}$
2	$\frac{4}{5}$
3	$\frac{6}{5}$
4	$\frac{8}{5}$
5	$\frac{10}{5} = 2$
10	4
15	6
20	8

¡Un momento! $\frac{10}{5}$ pulgadas es lo mismo que 2 pulgadas. ¡Ahora sé que crece 2 pulgadas ***cada*** 5 minutos! ¡Puedo dar saltos más grandes en mi mesa!

¡Quizá pueda utilizar este ritmo para dar saltos aún mayores!

Algunas notas sobre este enfoque:

- Se basa en la comprensión de que las fracciones no unitarias (fracciones con un número distinto de 1 como numerador, como $\frac{2}{5}$) son grupos de fracciones unitarias (como $\frac{1}{5}$) y que se puede contar por grupos de fracciones unitarias. Se trata de una comprensión valiosa y desmitificadora de las fracciones y es lo suficientemente importante como para tener su propio estándar. (Entender una fracción ***a/b*** con ***a*** > 1 como una suma de fracciones ***1/b***. (4.NF.3)) Si no está viendo cómo esta tabla implica contar por grupos de fracciones unitarias, fíjese bien en el patrón de los numeradores de la primera parte de la tabla.
- Al principio puede parecer que este enfoque requiere demasiado tiempo, pero empezar con pequeños pasos puede revelar patrones que hagan posibles pasos mayores y acortar el trabajo.

3) **Dividir el tiempo.** Un estudiante que llegue a la conclusión de que el carámbano crece 5 cm en 5 minutos también puede empezar a pensar en cuántos grupos de 5 minutos hay en $2\frac{1}{2}$ horas:

    Hay 12 grupos de 5 minutos en 1 hora, por lo que hay 24 grupos de 5 minutos en 2 horas.

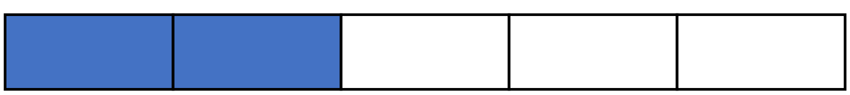
    Hay 12 grupos de 5 minutos en 1 hora, por lo que hay 6 grupos de 5 minutos en media hora.

    Por lo tanto, hay 24 + 6 grupos de 5 minutos en $2\frac{1}{2}$ horas.

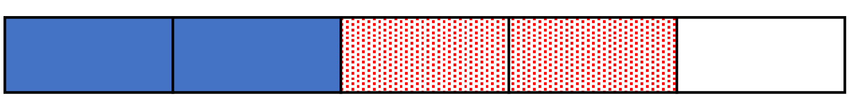
    En cada uno de esos 30 grupos de 5 minutos, el carámbano crece 5 cm, por lo que crece 5 cm 30 veces.

4) **Multiplicar el número de minutos por la cantidad que crece el carámbano en cada minuto.** Un estudiante puede utilizar un procedimiento memorizado para multiplicar $\frac{2}{5}$ de pulgada por minuto por 150 minutos, pero también podrían multiplicar con una visual utilizando modelos de barras. Podrían utilizar modelos de barras para hacer 150 grupos de $\frac{2}{5}$ (o al menos para hacerse una idea del aspecto que podría tener si hicieran 150 grupos).

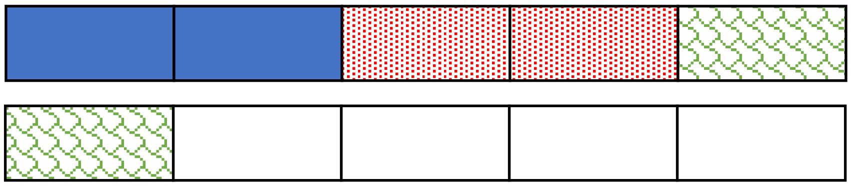
    He aquí un grupo de $\frac{2}{5}$, que representa el crecimiento de un minuto en pulgadas:



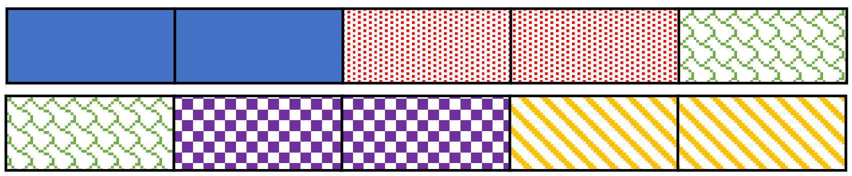
    Para ver dos grupos de $\frac{2}{5}$, el estudiante puede colorear dos bloques más. Esto supone 2 minutos de crecimiento, todavía menos de una pulgada entera.



Para un tercer grupo, tendrán que añadir otra barra. En tres minutos, el carámbano crecerá $1\frac{1}{5}$ pulgadas.



Parece que pueden caber dos grupos más en el modelo anterior. He aquí una imagen de 5 grupos de $\frac{2}{5}$. Esto equivale a 5 minutos de crecimiento, un total de 2 pulgadas enteras.



¿Cómo continuaría este modelo de multiplicación? ¿Qué conexiones puede establecer entre este modelo visual y las estrategias de fragmentación anteriores? ¿Qué conexiones puede establecer con un procedimiento que conozca para multiplicar fracciones

PREGUNTA 15

Un carámbano crece a un ritmo de $\frac{2}{5}$ de pulgada por minuto. ¿Cuánto crecerá el carámbano en $2\frac{1}{2}$ horas?

A. 5 pulgadas

B. $12\frac{1}{2}$ pulgadas

C. 50 pulgadas

D. 60 pulgadas

E. 150 pulgadas

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 16

Mark va a comprar unos bulbos de flor para plantarlos en su jardín en primavera. En la tienda de jardinería, los bulbos grandes cuestan $10 cada uno y los pequeños $4 cada uno. Quiere gastarse menos de $60 en bulbos. La desigualdad de abajo representa su gasto, donde x es el número de bulbos grandes y y es el número de bulbos pequeños que compra.

$$10x + 4y < 60$$

¿Qué par ordenado (***x***, ***y***) representa una combinación de bombillas grandes y pequeñas que Mark puede comprar?

A. (4, 5)

B. (4, 6)

C. (3, 8)

D. (3, 7)

E. (2, 10)

Comprensión básica necesaria

Los estudiantes deben comprender que las letras pueden representar números desconocidos o números que pueden cambiar. Para ver una lección que consigue que los estudiantes utilicen variables en expresiones en niveles iniciales, consulte la **Unidad 1, Lección 4 - Comprender el perímetro con fórmulas** en el Plan de estudios para adultos que aprenden matemáticas (CALM) en **https://terc.edu/calm.**

Nota: Para responder esta pregunta, no es necesario que los estudiantes sepan escribir o resolver desigualdades (inecuaciones). Lo principal es que comprendan que el primer número en cada opción de respuesta representa el número de bulbos grandes y el segundo número indica la cantidad de bulbos pequeños. Merece la pena tomarse el tiempo necesario para esforzarse en comprenderlo.

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

1) **Recordar el contexto.** Aunque esta pregunta puede responderse probando todas las opciones, un estudiante puede ahorrar tiempo considerando cuáles tienen más probabilidades de funcionar. Mark quiere gastar ***menos de $***60, así que conviene buscar opciones con una cantidad razonable de bulbos grandes (que son más caros) sin incluir demasiados bulbos pequeños (que cuestan menos). Por ejemplo, al observar rápidamente las opciones, se nota que la opción **(B)** (4 bulbos grandes y 6 bulbos pequeños) no sea la mejor, ya que la opción **(A)** (4 bulbos grandes y ***5*** bulbos pequeños) tiene el mismo número de bulbos grandes, pero menos bulbos pequeños, por lo que debe costar menos dinero.

2) **Escribir todas las posibilidades.** Una pregunta como esta puede interpretarse como un conjunto de preguntas de sí o no, en lugar tratarse como una de opción múltiple. Para cada posible respuesta, el estudiante puede calcular el costo correspondiente y determinar si Mark puede o no realizar esa compra.

Por ejemplo:

Elección (**A**):	4 bombillas grandes x 10 $ cada una = 40 $.
	5 bulbos pequeños x 4 $ cada uno = 20 $.
	Costo total = <u>60 $</u> **¡Demasiado!**

(Recuerde que la pregunta decía que Mark quiere gastar ***menos de*** $60, por lo que la opción **a** no es correcta).

3) **Hacer una tabla.** Una tabla suele ser una herramienta muy útil cuando se utiliza de forma estratégica. Tomarse un momento para crear una estructura que organice su razonamiento puede hacer que el proceso sea más rápido y que haya menos posibilidad de cometer errores. En este problema, hay varias cantidades que deben considerarse, por lo que trabajar de forma organizada marcará una gran diferencia.

Opción de respuesta	# de bulbos grandes	Costo de las bulbos grandes	# de bulbos pequeños	Costo de las bulbos pequeños	Costo total
A	4	$40	5	$20	$60
B					
C					
D					
E					

Ya se ha completado parte de la tabla; usted puede terminarla de forma independiente. Fíjese en dónde encuentra patrones en el razonamiento repetido. ¿En qué se parece completar esta tabla a sustituir los valores de x e y en la desigualdad dada en el problema? ¿En qué se diferencia?

Extra: tanto estudiantes como docentes pueden aprender y disfrutar mucho más de un escenario como este si lo exploran de forma abierta, en lugar de limitarse al formato tradicional de opción múltiple. Preguntarse qué combinaciones de bulbos puede comprar Mark es mucho más interesante que preguntarse si una combinación específica es posible o no. ¿Cómo podrían usted y sus estudiantes explorar esta pregunta? ¿Qué ideas y conceptos podrían surgir a partir de esa exploración? ¿Qué otras preguntas podrían plantearse?

PREGUNTA 16

Mark va a comprar unos bulbos de flor para plantarlos en su jardín en primavera. En la tienda de jardinería, los bulbos grandes cuestan $10 cada uno y los pequeños $4 cada uno. Quiere gastarse menos de $60 en bulbos. La desigualdad de abajo representa su gasto, donde x es el número de bulbos grandes y y es el número de bulbos pequeños que compra.

$$10x + 4y < 60$$

¿Qué par ordenado (***x***, ***y***) representa una combinación de bombillas grandes y pequeñas que Mark puede comprar?

A. (4, 5)

B. (4, 6)

C. (3, 8)

D. (3, 7)

E. (2, 10)

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 17
¿Cuál par ordenado satisface el sistema de ecuaciones siguiente?

$$2x - y = 11$$
$$x + y = 10$$

A. (5, 5)

B. (10, 9)

C. (10, 11)

D. (7, 3)

E. (2, 8)

Nota: Esta pregunta está ligeramente adaptada de una que se encuentra en Tools of Algebra: Expressions, Equations, and Inequalities Part 2, un recurso gratuito de CUNY diseñado para estudiantes adultos.

Comprensión básica necesaria

Los estudiantes deben sentirse cómodos trabajando con expresiones y ecuaciones fuera de un contexto específico. Si sus estudiantes aún no están preparados para trabajar a este nivel de abstracción, es mejor no usar esta pregunta. La pregunta 4 de este paquete implica un razonamiento similar, pero es más concreta. Es importante que los estudiantes deben comprender qué significa que un valor "satisfaga" una ecuación (es decir que, al sustituir la variable por ese valor, la ecuación se cumple), y que entiendan que los pares ordenados en las opciones de respuesta representan los valores de x y y en ese orden. Cuando los estudiantes estén listos para pensar de manera más abstracta, sentirán la necesidad de comprender estos conceptos.

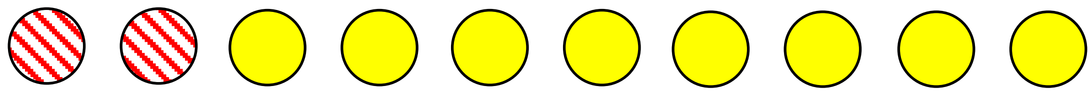
Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

1) **Convertirlo en una historia**. Aunque crear una historia realista que represente el sistema de ecuaciones puede requerir cierto esfuerzo, un estudiante puede transformar algo que a primera vista parece una sopa de letras en algo más comprensible usando palabras. Por ejemplo, un estudiante podría explicar el sistema de ecuaciones de esta manera:

   Hay dos números. Una cosa que sé sobre ellos es que, si duplico uno y le resto el otro, obtengo 11. También sé que, es que juntos suman 10. Quiero averiguar cuáles son los dos números.

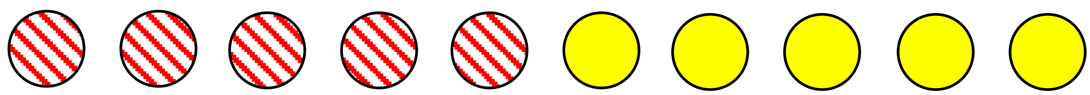
   Tal vez no sea la historia más emocionante del mundo, pero es una forma de dar sentido al problema que lo hace parecer más accesible. Enfocar este "problema" como un juego o un rompecabezas o incluso una búsqueda puede ayudar al estudiante a liberarse de la presión de recordar un procedimiento correcto. ¿Qué ideas sobre cómo jugar con los números se le ocurren al leer esta historia que quizás no se le ocurrirían al limitarse si solo miraran las ecuaciones?

2) **Hacer un dibujo.** Puede resultar difícil hacer dibujos de restas, pero visualizar la relación en la segunda ecuación podría ayudar bastante a los estudiantes a hacerse una idea de qué tipos de números podrían ser soluciones del sistema. Un estudiante que haya tenido oportunidades de trabajar con manipulativos concretos, como fichas, podría imaginar la segunda relación como un grupo de diez fichas de dos colores diferentes, de esta manera:



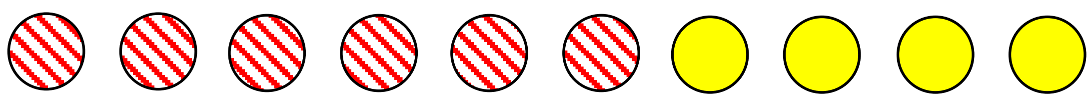
x podría ser 2 y y podría ser 8 porque $2 + 8 = 10$

O así:



x y y podrían ser 5 cada una porque $5 + 5 = 10$

O así:



x podría ser 6 e y podría ser 4 porque $6 + 4$ es 10

En cada conjunto, el número total de fichas es el mismo. Un estudiante podría incluso imaginar algo como un conjunto de 10 monedas de un centavo, algunas con cara y otras con cruz. Dar sentido a la relación más simple puede incluso permitir a los estudiantes eliminar algunas opciones de respuesta incorrectas.

3) **Reformular la resta.** Una de las razones por las que puede ser un reto representar la resta con dibujos es que, a menudo, se siente como una acción: la acción de restar. Sin embargo, un estudiante que haya desarrollado el sentido de la operación con la resta puede ser capaz de expresar la primera ecuación de una o varias de las siguientes maneras:

- La diferencia entre el doble de x y y es de 11.
- Dos veces x son 11 más que y.
- Si sumo 11 a y, obtendré el mismo número que si duplico x.

¿Cómo pueden facilitar estas comprensiones la elaboración de un cuadro o la extracción de conclusiones sobre los valores de x y y?

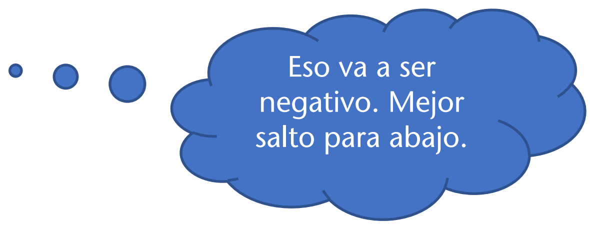
4) **Hacer inferencias lógicas**. Un estudiante podría preguntarse qué sabe sobre los números y sus relaciones y qué conclusiones puede sacar. Como todos los valores de las opciones de respuesta son números enteros positivos, un estudiante podría hacer inferencias como éstas:

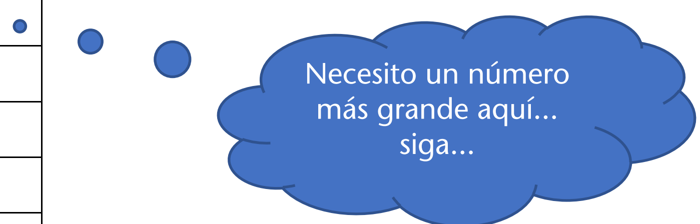
- x y y son ambos menores que 10 porque suman 10.
- $2x$ tiene que ser más que y por 11, por lo que x es probablemente el número mayor.

Aunque siempre es posible abordar un problema como éste probando todas las opciones de respuesta, tomarse un minuto para pensar en las relaciones y en qué números es probable que funcionen puede ahorrar tiempo.

5) **Hacer una tabla.** Incluso si no se tratara de una pregunta de elección múltiple, una tabla rápida podría ayudar a un estudiante a hacerse una idea de qué números podrían satisfacer el sistema. Utilizando el hecho de que los números tienen que sumar 10, un estudiante podría establecer una tabla de esta manera:

x	y	$2x - y$
0	10	
1	9	
2	8	
3	7	
4	6	
5	5	5
6	4	
7	3	
8	2	
9	1	
10	0	





Quizá se pregunte si este planteamiento sería útil si las respuestas no fueran números enteros positivos. Puede que la respuesta no aparezca en la tabla, pero aun así conseguiría que el estudiante esté más cerca de encontrarla.

PREGUNTA 17

¿Qué par ordenado satisface el sistema de ecuaciones siguiente?

$$2x - y = 11$$
$$x + y = 10$$

A. (5, 5)

B. (10, 9)

C. (10, 11)

D. (7, 3)

E. (2, 8)

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 18

Para mejorar su inglés, Isabel ve programas de la televisión estadounidense a un 75% de velocidad. Si ve un programa que dura 30 minutos a velocidad normal, ¿cuánto tardará en verlo a velocidad del 75%?

A. 22.5 minutos

B. 37.5 minutos

C. 40 minutos

D. 45 minutos

E. 52.5 minutos

Comprensión básica necesaria

Los estudiantes deben tener una comprensión básica de la tasas o velocidades. Los estudiantes también deben tener cierta familiaridad con los porcentajes de referencia a múltiplos del 25%.

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

1) **Dar sentido al problema.** Este es siempre un primer paso fundamental en la resolución de problemas. De hecho, es el comienzo del primer estándar de práctica matemática: Dar sentido a los problemas y perseverar en su resolución. Para una pregunta como ésta, merece la pena dedicar un minuto a pensar qué significa la pregunta y cómo sería una respuesta. En particular, ¿qué impacto tiene ***ralentizar*** un programa en el tiempo que se tarda en verlo? Los estudiantes que no se detienen a dar sentido al problema pueden ser víctimas de una opción de respuesta que les distraiga, especialmente si se lanzan directamente a hacer cálculos y encuentran rápidamente el 75% de 30 minutos. Los estudiantes que se detienen a pensar en el contexto real se darán cuenta de que ralentizar un programa hará que se tarde ***más en*** verlo.

2) **Probar con números más sencillos.** Calcular una velocidad al 75% puede ser complicado, pero ¿qué pasa si usamos una cifra más simple, como reducirla al 50%? Si Isabel ve el programa a la mitad de velocidad, ¿cuánto durará en total? Si no se obtiene una respuesta intuitiva de inmediato, cambiar de contexto puede ser útil. Por ejemplo, si normalmente tardo 20 minutos en llegar a casa desde el trabajo, pero el tráfico me obliga ir a la mitad de mi velocidad habitual, ¿cuánto tiempo tardaré en llegar? (También se podría plantear así: Si conduzco a la mitad de velocidad, ¿qué fracción del trayecto habré recorrido en el tiempo habitual?). ¿De qué sirve usar números más sencillos si no son los del problema? Puede ayudar al estudiante a reconocer patrones y utilizar la estructura del problema

3) **Buscar y aprovechar la estructura.** Probar con números más sencillos es una estrategia útil para comprender la estructura de la situación. Una tabla con variaciones más fáciles en la velocidad podría ser de gran ayudar. ¿Puede usar tu comprensión de esa estructura para completar las celdas vacías de la tabla en la página siguiente?

Fracción de velocidad	Efecto sobre el tiempo
Media velocidad	Tarda el doble
Cuarto de velocidad	
Doble velocidad	
	Se tarda un tercio de tiempo

¿Cómo puede utilizar su comprensión de lo que ocurre al acelerar o ralentizar con números más sencillos para dar sentido a lo que ocurre cuando el espectáculo se reduce al 75% o $\frac{3}{4}$ de su velocidad normal? (Pista: ¿Cómo se relaciona una velocidad de $\frac{3}{4}$ con una de $\frac{1}{4}$?)

4) **Busque y utilice la estructura II.** Otra forma de pensar en el efecto de ralentizar el programa es considerar cuánto del espectáculo habrá visto Isabel en un tiempo determinado. Un estudiante podría razonar que, al reducir la velocidad, Isabel verá menos del programa en la misma cantidad de tiempo y razonar de la siguiente manera:

Cuánto tiempo he visto	Cuánto he visto del programa
1 minuto	45 segundos (75% de 1 minuto)
4 minutos	3 minutos
8 minutos	6 minutos
12 minutos	9 minutos
…	…
???? minutos	30 minutos

5) **Visualice la barra de progreso.** En una línea similar a la del planteamiento anterior, un estudiante podría decir que, después de 30 minutos, Isabel solo habría visto el 75% del programa. (A velocidad normal, vería el 100% en 30 minutos, por lo tanto, a una velocidad del 75%, vería solo el 75% en ese mismo tiempo).

Después de 30 minutos, solo he recorrido el 75% del camino

¿Cómo podría marcar un estudiante el diagrama anterior para ayudarle a razonar sobre el tiempo total? (Sugerencia para el docente: marcar los puntos de referencia del 25% y 50% puede hacer que la representación visual sea más clara si los estudiantes tienen dificultades con este planteamiento).

PREGUNTA 18

Para mejorar su inglés, Isabel ve programas de la televisión estadounidense a un 75% de velocidad. Si ve un programa que dura 30 minutos a velocidad normal, ¿cuánto tardará en verlo a velocidad del 75%?

A. 22.5 minutos

B. 37.5 minutos

C. 40 minutos

D. 45 minutos

E. 52.5 minutos

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 19

Hay una diferencia de edad de 35 años entre Paulina y su hijo. Si el hijo de Paulina tiene 8 años, ¿qué edad tiene Paulina?

A. 27

B. 34

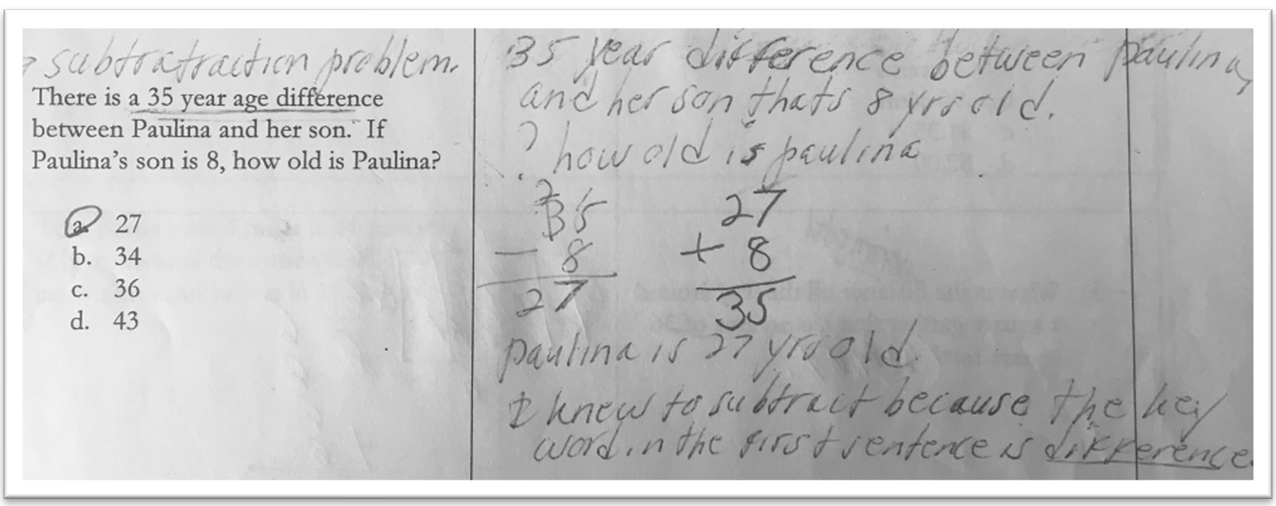
C. 36

D. 43

Comprensión básica necesaria

Los estudiantes deben ser capaces de realizar operaciones con números enteros de una y dos cifras.

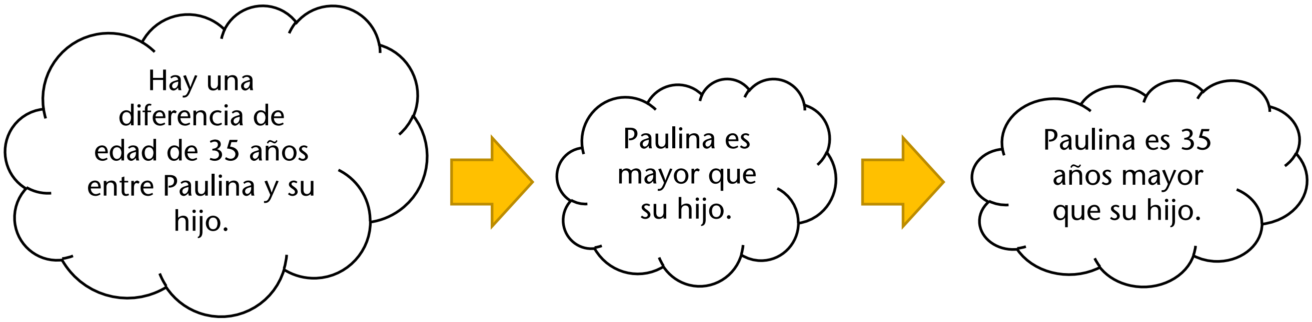
Nota para el maestro: Una estrategia que muchos estudiantes han aprendido al abordar los problemas con enunciados identificando palabras clave y realizando las operaciones que estas parecen indicar. Sin embargo, puede llevarlos por el camino equivocado. A continuación, se nuestra un ejemplo del trabajo de algunos estudiantes antes de explorar enfoques más conceptuales.



Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

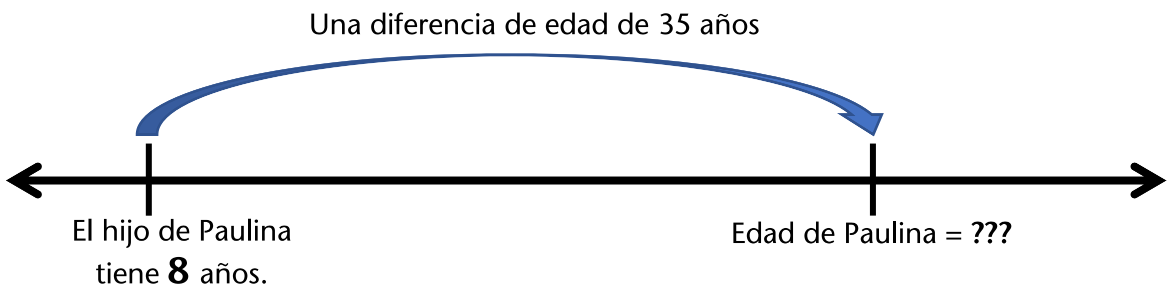
1) **Dar sentido al problema/Pensar en lo razonable.** En lugar de buscar palabras clave de inmediato, un estudiante podría tomarse un momento para reflexionar sobre lo que sabe o incluso volver a contar la historia con sus propias palabras. Este enfoque puede ayudar a identificar las relaciones entre los datos del problema de una forma más clara que simplemente escanear el texto en busca de palabras clave. Por ejemplo, si el problema dice que hay una diferencia de edad de 35 años entre Paulina y su hijo, antes

de decidir qué operación usar, el estudiante podría replantear la información mentalmente de una manera más accesible, razonando de la siguiente forma:

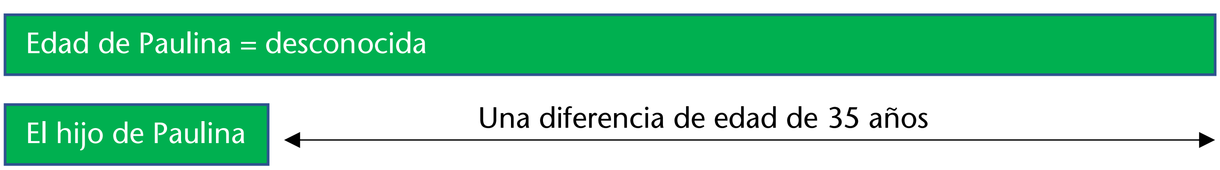


¿Cómo puede afectar este encuadre las matemáticas que el estudiante elija hacer?

2) **Usar una recta numérica.** Un diagrama de la recta numérica puede dejar claro cuáles de las opciones de respuesta son razonables y qué operación u operaciones matemáticas llevarán al estudiante a la respuesta correcta:



3) **Usar un modelo de barras (también llamado diagrama de cinta o tiras de Singapur).** Utilizar una barra para ilustrar la edad de Paulina y otra para ilustrar la edad de su hijo también dará al estudiante una idea de qué cálculo le ayudará a encontrar la información que falta:



4) **Hacer una analogía con una situación en la que se conozca toda la información.** Un estudiante puede pensar en una situación similar en su propia vida y utilizarla para averiguar las relaciones entre los números del problema. Por ejemplo, si el estudiante tiene 46 años y su sobrino 7, el estudiante puede averiguar la diferencia entre sus edades y luego puede preguntarse, si supiera la edad de mi sobrino y nuestra diferencia de edad, ¿cómo averiguaría mi propia edad? Si el estudiante no está seguro, puede incluso jugar a probar diferentes cálculos y ver cuál le lleva a la respuesta correcta. Una vez que comprenda lo que funciona en su propia situación, podrá aplicar el mismo razonamiento al problema.

PREGUNTA 19

Hay una diferencia de edad de 35 años entre Paulina y su hijo. Si el hijo de Paulina tiene 8 años, ¿qué edad tiene Paulina?

A. 27

B. 34

C. 36

D. 43

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 20

Ray pagó 2 blocs de notas y 3 bolígrafos con un billete de $20 y recibió $6 de cambio. Los blocs de notas costaron $4 cada uno. ¿Cuánto costó cada bolígrafo?

A. $1

B. $2

C. $3

D. $5

E. $6

Comprensión básica necesaria

Los estudiantes deben ser capaces de realizar operaciones con números enteros de una y dos cifras. Los estudiantes deben comprender el concepto de "cambio" en las transacciones con dinero.

Nota: Esto puede parecer un problema de historia algebraica, pero muchos enfoques pueden utilizar el razonamiento algebraico sin necesidad de notación algebraica.

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

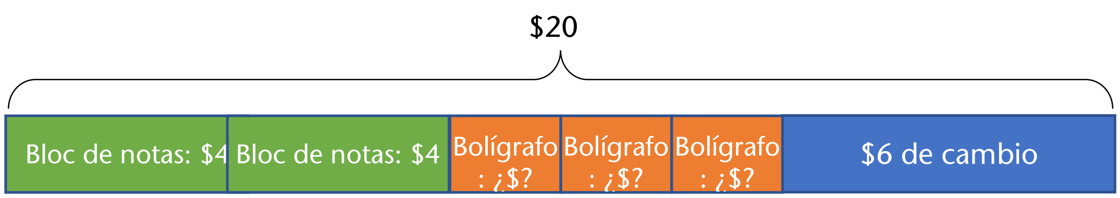
1) **¡Estimar!** Un estudiante puede dominar casi cualquier tarea matemática que tenga un contexto en el mundo real (y muchas que no lo tienen) con la estimación. En este caso, un estudiante podría razonar que es poco probable que el costo de cada bolígrafo sea de más de 5 o 6 dólares si la compra total fue de menos de 20 dólares. Los números de esta tarea son pequeños, por lo que calcular con ellos no es demasiado complicado, pero aun así merece la pena dedicar algo de tiempo a decidir cómo sería una respuesta razonable por dos razones: a) si un estudiante comete un error de cálculo o de estrategia que le lleva a una respuesta poco razonable, haber estimado le incitará a comprobar su trabajo, y b) el proceso de estimación ayuda a los estudiantes a hacerse una idea de la estructura de la situación, preparándoles para un análisis más preciso.

2) **Trabajar hasta llegar al costo de los bolígrafos.** Empezando por el dato más amplio de la historia, un estudiante puede ir desgranando la información pieza por pieza para llegar a la información que busca, haciendo deducciones por el camino. Recibir $6 de cambio de $20 significa que Ray pagó $14 por los blocs de notas y los bolígrafos. Los blocs de notas cuestan $4 cada uno, por lo que suponen $8 de la cantidad pagada y el resto fue para los bolígrafos. ¿Qué podría hacer el estudiante a continuación? ¡No olvide que había 3 bolígrafos!

   Algunos estudiantes pueden pensar que este tipo de razonamiento es "hacer trampas" porque no se parece a los pasos que encontraría en un libro de matemáticas. Los estudiantes que resuelven las cosas "a su manera" pueden llegar a subestimar a su razonamiento, especialmente si su experiencia pasada en clase de matemáticas o con los libros de matemáticas implicaba que hicieran los problemas de una forma específica y que mostraran su trabajo para demostrar que lo habían hecho así. Escuchar y validar el razonamiento de los estudiantes como una forma legítima de pensamiento matemático es fundamental para reparar el daño que pueden haber experimentado en clase de matemáticas.

3) **Dibujar un modelo de barras (también llamado diagrama de cintas o de tiras de Singapur).** Cuando un problema narrativo dice cómo se relacionan las cantidades, hacer un dibujo que ilustre esa relación puede ayudar al estudiante a averiguar qué operaciones le llevarán a la información que falta. Este modelo muestra que los blocs de notas y los bolígrafos costaron $6 menos que el billete de $20:

Y este modelo alternativo muestra cómo se dividió el billete de 20 dólares.



¿Cómo podrían ayudar estos modelos a un estudiante a calcular el costo de un bolígrafo? (Tenga en cuenta que dibujar y utilizar modelos de barras requiere cierta práctica. Puede ser útil empezar proporcionando los modelos a los estudiantes para que aprendan a razonar con ellos, lo que les motivará a dibujar sus propios modelos. Para ver un ejemplo de la situación mencionada, eche un vistazo a este video práctico de las tiras de Singapur).

4) **Escribir y resolver una ecuación.** Se trata de un problema que puede resolverse mediante una ecuación. De hecho, a los estudiantes que han practicado el razonamiento algebraico lo suficiente como para sentirse cómodos abreviando su notación, les resulta bastante natural representar las relaciones del problema utilizando símbolos. He aquí una ecuación que un estudiante podría escribir y resolver:

$$2(4) + 3x = 20 - 6$$

Observe el primer modelo de barras anterior. ¿Cómo se compara esta ecuación con esa representación? ¿Cómo se comparan los pasos que podría dar para resolver esta ecuación con los que podría dar para resolver el problema con el modelo de barras?

He aquí otra posible ecuación que podría utilizar un estudiante:

$$2(4) + 3x + 6 = 20$$

¿Cómo se compara con el segundo modelo de barra?

¿Hay otras formas de escribir una ecuación para este problema? ¿Podrían esas ecuaciones representarse también visualmente con modelos de barras?

PREGUNTA 20

Ray pagó 2 blocs de notas y 3 bolígrafos con un billete de $20 y recibió $6 de cambio. Los blocs de notas costaron $4 cada uno. ¿Cuánto costó cada bolígrafo?

A. $1

B. $2

C. $3

D. $5

E. $6

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque

PREGUNTA 21

Amy y Kate están comprando en Internet arena para gatos y han encontrado los siguientes precios en cinco tiendas en línea diferentes. ¿Qué tienda tiene el precio más bajo por libra de arena para gatos?

Página web	Oferta
Pet Supplies Unlimited	8 libras for $27
Cat Life	16 libras for $40
Raining Cats and Dogs	10 libras for $35
Love Your Pet	15 libras for $37
PetCare.com	12 libras for $36

A. Pet Supplies Unlimited

B. Cat Life

C. Raining Cats and Dogs

D. Love Your Pet

Comprensión básica

Los estudiantes deben ser capaces de interpretar la información presentada en una tabla. Los estudiantes no necesitan habilidades formales de razonamiento proporcional (como establecer y resolver proporciones). La mayoría de los adultos ya tienen formas de razonar sobre la comparación de proporciones.

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

1) **¡Estimar!** Esta es una situación de la vida real, y la mayoría de las veces tratamos de resolverla haciendo la menor cantidad de cálculos posible. En muchos casos, una buena estimación es suficiente. En este caso, un estudiante podría comprobar entre qué cantidades de dólares enteros se encuentra cada tarifa. Por ejemplo, la tarifa de Pet Supplies Unlimited debe ser mayor a $3 por libra ya que a $3 por libra, 8 libras solo costarían $24. Sin embargo, también debe ser menos a $4 por libra, ya que a ese precio, 8 libras costarían $32. (Es decir, el precio real está entre $24 y $32).

   En la página siguiente, encontrarás una tabla parcialmente completada con información tomada de los sitios web de las tiendas de animales mencionadas en el problema. Intente rellenar usted mismo el resto de la tabla. ¿Cómo le ayuda esto a acercarse a la solución? ¿Puede resolver el problema solo con estimaciones? ¿Por qué sí o por qué no?

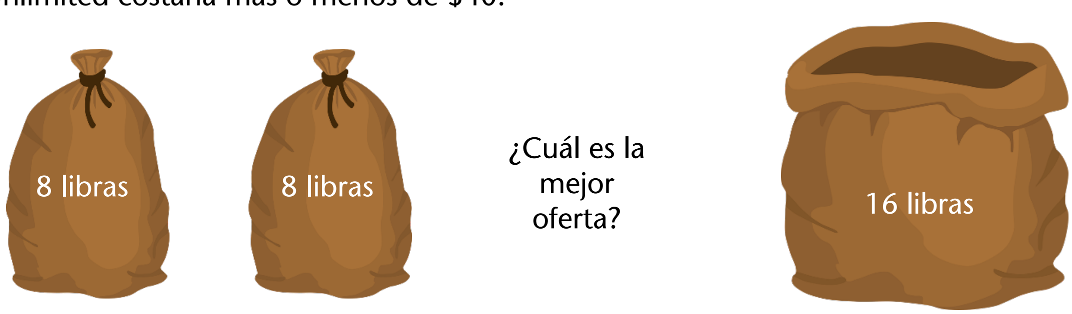
Página web	Oferta	Estimación
Pet Supplies Unlimited	8 libras for $27	Entre 3 y 4 dólares por libra
Cat Life	16 libras for $40	
Raining Cats and Dogs	10 libras for $35	
Love Your Pet	15 libras for $37	
PetCare.com	12 libras for $36	

(Aunque tenga una calculadora a mano, es una buena idea estimar antes de calcular. Verá por qué en el enfoque #4)

2) **Estimación II.** Si un estudiante se toma un momento para leer las diferentes ofertas, podría darse cuenta de que los precios de las tres últimas marcas de la tabla son muy similares, pero la cantidad de libras que ofrecen varía al menos en 2 libras. Por ejemplo, en PetCare.com, puede conseguir 2 libras más que en Raining Cats and Dogs por solo $1 adicional. Y en Love Your Pet, se conseguir 3 libras más que en PetCare.com, también por solo $1 más. ¿Cómo podría esta información ayudar al estudiante a pensar en cuál de esas tres últimas marcas podría ser la mejor oferta?

Una vez que tengan una idea de cuál de las tres es la mejor oferta, ¿cómo podrían ampliar su razonamiento para compararla con las dos primeras marcas de la tabla?

3) **Estimación III.** Otra forma útil de aplicar la estimación es al hacer comparaciones individuales. Por ejemplo, en Pet Supplies Unlimited, puede conseguir 8 libras por $27, mientras que en Cat Life se obtienen 16 libras por $40. Un estudiante podría darse cuenta la oferta de Cat Life incluye el doble de libras que de la de Pet Supplies Unlimited y pensar en duplicar esta última para compararlas. No obstante, ¿realmente es necesario hacer ese cálculo exacto? Lo único que necesita saber es si duplicar la oferta de Pet Supplies Unlimited costaría más o menos de $40.



2 bolsas a $27 cada una

1 bolsa por 40 dólares

Una comparación individual elimina una opción de respuesta. ¿Qué comparación podrían hacer a continuación?

4) **Calcule los precios por unidad**. Un estudiante puede optar por usar una calculadora para encontrar el precio por libra de cada marca. Esta puede ser una forma rápida de resolver una pregunta como esta en el examen o en la vida real. Sin embargo, es importante que primero reflexione sobre lo que está haciendo (¡quizás empezando con una estimación!). Encontramos las tasas unitarias dividiendo, pero ¿qué cantidad se divide entre cuál?

Considere la siguiente tabla:

Página web	Libras	Dólares	Libras÷ Dólares	Dólares ÷ Libras
Pet Supplies Unlimited	8	27	0.296	3.375
Cat Life	16	40	0.4	2.5
Raining Cats and Dogs	10	35	0.286	3.5
Love Your Pet	15	37	0.405	2.47
PetCare.com	12	36	0.33	3

Hacer una estimación antes de calcular puede ayudar al estudiante a identificar cuál de los resultados a representar cuál de los resultados representa el precio por libra de arena para gatos. Pero ¿qué significan los números de la otra columna? ¿Cómo podrían ayudar a determinar qué página web ofrece el mejor precio? (Pista: Si dividir dólares entre libras da como resultado precio por libra, ¿qué se obtiene al dividir libras entre dólares?) Es fácil dividir en la dirección "equivocada" si no se presta atención, pero tener claro qué tipo de respuesta es razonable permite corregir rápidamente ese error.

PREGUNTA 21

Amy y Kate están comprando en Internet arena para gatos y han encontrado los siguientes precios en cinco tiendas en línea diferentes. ¿Qué tienda tiene el precio más bajo por libra de arena para gatos?

Página web	Oferta
Pet Supplies Unlimited	8 libras for $27
Cat Life	16 libras for $40
Raining Cats and Dogs	10 libras for $35
Love Your Pet	15 libras for $37
PetCare.com	12 libras for $36

A. Pet Supplies Unlimited

B. Cat Life

C. Raining Cats and Dogs

D. Love Your Pet

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 22

Alicia trabaja en una tienda de electrodomésticos donde gana un salario base de $18.50 por hora más una comisión del 20% sobre los electrodomésticos que venda. La semana pasada, sus ganancias por comisiones fueron de $396. ¿Cuál fue el valor total de los electrodomésticos que Alicia vendió esa semana?

A. $79.20

B. $475.20

C. $792.00

D. $1,584.00

E. $1,980.00

Nota: Se trata de una variación de la pregunta 14 (Los ingresos de Alicia). El escenario es el mismo, pero la pregunta formulada es diferente.

Comprensión básica necesaria

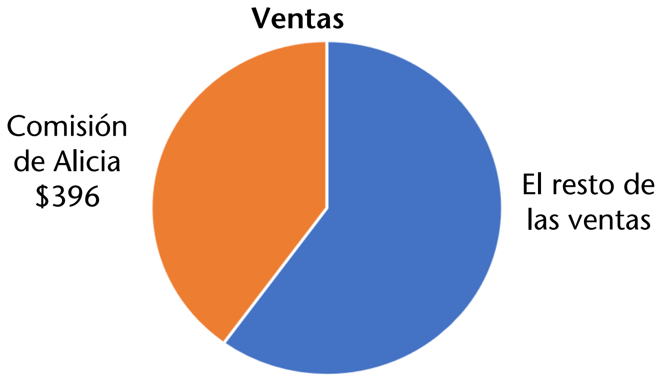
Los estudiantes deben comprender que un porcentaje representa una relación parte-todo y estar familiarizados con algunos porcentajes de referencia como el 50% y el 25%.

Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

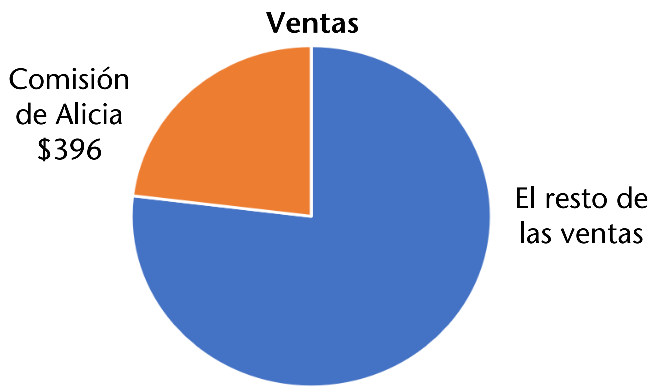
1) **Estimar: atender a la precisión.** La estimación suele ser un excelente punto de partida. Ayuda a los estudiantes a entender mejor la situación y a evitar que se sientan abrumados por los números. En este caso, llegar a una estimación del total de ventas hará que los estudiantes piensen en cómo se relaciona ese número con las cifras dadas en el problema. Por ejemplo, si Alicia ganó $396 en comisiones, ¿eso significa que el total de sus ventas fue mayor o menor que $396? ¿Qué tendría más sentido? Esto tipo de preguntas ayuda al estudiante a aclarar qué información tiene y qué necesita encontrar. ¿Deben calcular el 20% de $396? Eso daría un valor menor a $396, lo cual no tendría sentido como total de ventas. Más bien, parece que $396 representan ***el*** 20% y necesitan encontrar el número del que $396 es ese 20%. Ese número debe ser mayor que $396. ¿Pero cuánto mayor? ¿Solo un poco o mucho más?

Nota: Saber y tener en cuenta lo que representa cada número en un problema (por ejemplo, entender que $396 es el 20% de una cantidad que debo encontrar) es parte de desarrollar precisión, una de las prácticas matemáticas (el Estándar para la Práctica de las Matemáticas #6). Fomentar una comunicación clara en el aula sobre el significado de los números que se están utilizando ayudará a los estudiantes a desarrollar este importante hábito mental matemático, útil tanto para los exámenes como para resolver problemas en la vida real.

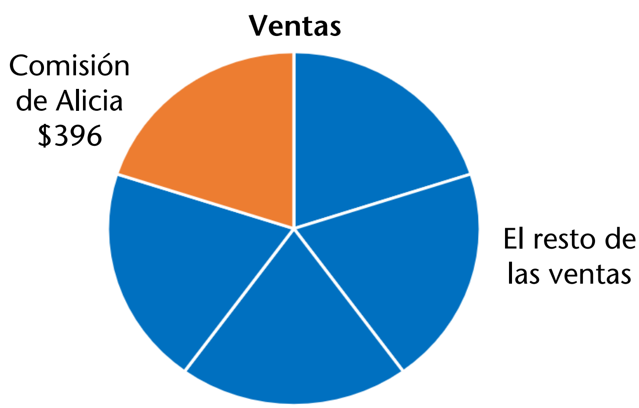
2) Estimar con una imagen: utilizar puntos de referencia. ¿Cómo luce el 20%? Una representación habitual de los porcentajes es un gráfico circular (o una tabla). Dependiendo de los puntos de referencia con los que se sienta cómodo un estudiante, podría representar el 20% como menos de la mitad...



o, como menos de un cuarto...

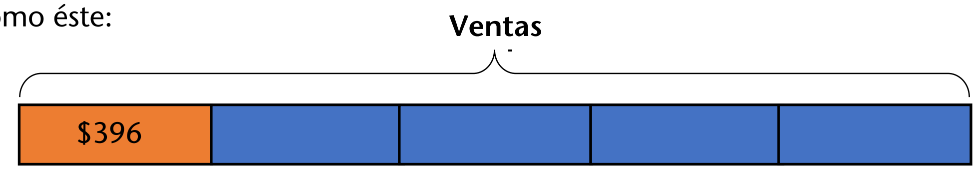


o, más exactamente aún, como exactamente una quinta parte.

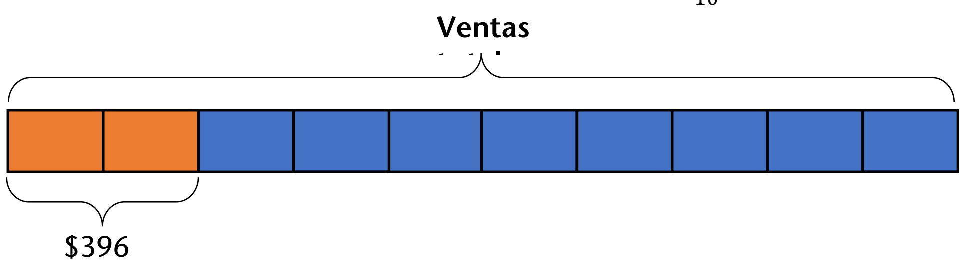


¿Cómo podrían ayudar estas imágenes a un estudiante a estimar el total de las ventas? (Nota: Un estudiante que utilice el punto de referencia 50% para estimar cuál es el total cuando se conoce el 20% no se equivoca. Disponer de puntos de referencia más precisos permitirá a los estudiantes hacer mejores estimaciones pero los estudiantes tienen que trabajar con los puntos de referencia que conocen... y seguir ampliando su repertorio).

3) **Razone con un modelo de barras -Utilice puntos de referencia.** Un estudiante que esté familiarizado con la equivalencia de 20% y $\frac{1}{5}$, podría dibujar un modelo de barras como éste:



Mientras que un estudiante que no tenga el 20% en su conjunto de puntos de referencia podría pensar en cambio en trozos del 10% o $\frac{1}{10}$:



¿Cómo podrían estas imágenes ayudar a un estudiante a calcular las ventas totales?

Nota: Para más información sobre el razonamiento sobre porcentajes con modelos de barras, véase Modelado de porcentajes y fracciones de referencia.

PREGUNTA 22

Alicia trabaja en una tienda de electrodomésticos donde gana un salario base de $18.50 por hora más una comisión del 20% sobre los electrodomésticos que venda. La semana pasada, sus ganancias por comisiones fueron de $396. ¿Cuál fue el valor total de los electrodomésticos que Alicia vendió esa semana?

A. $79.20

B. $475.20

C. $792.00

D. $1,584.00

E. $1,980.00

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

PREGUNTA 23

El área de un rectángulo es de 24 pulgadas cuadradas. El perímetro del rectángulo es de 22 pulgadas. ¿Cuál es la longitud del lado más corto del rectángulo?

A. 2 pulgadas

B. 3 pulgadas

C. 4 pulgadas

D. 6 pulgadas

E. 8 pulgadas

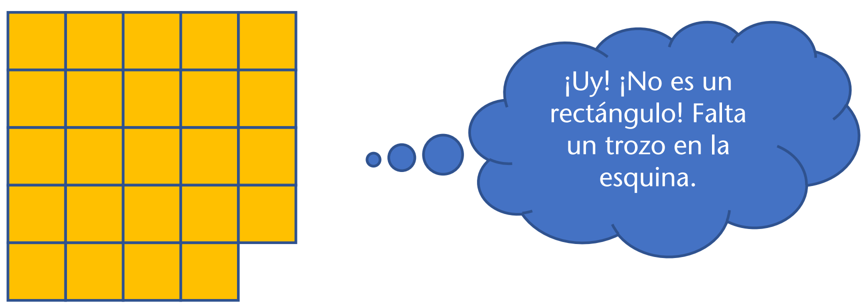
Comprensión básica necesaria

Los estudiantes deben comprender los significados de área y perímetro. Deben comprender que el área de una figura es el número de unidades cuadradas que hay en su interior y que el perímetro de una figura es la distancia que la rodea.

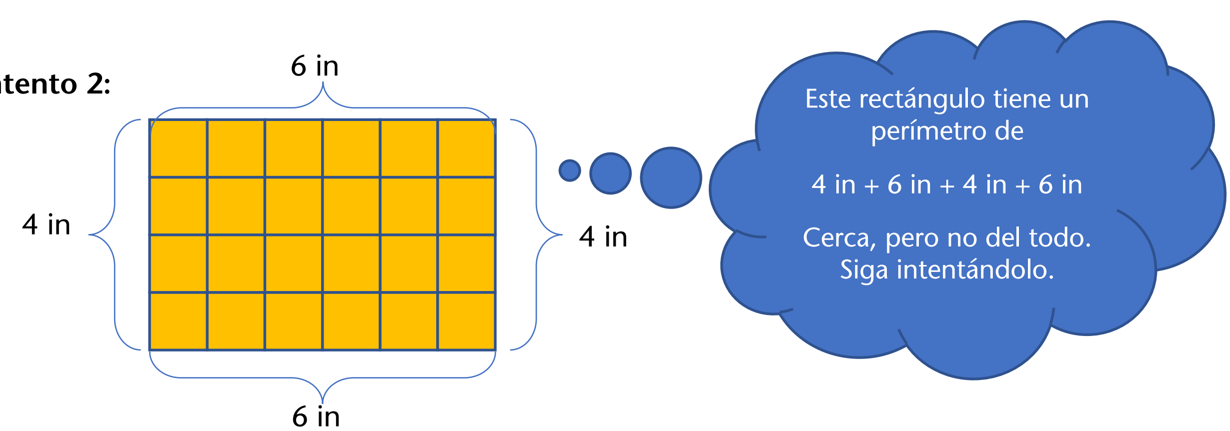
Estrategias que podrían utilizar los estudiantes

1) **Jugar con el área de forma concreta.** Sabiendo que el área del rectángulo es de 24 pulgadas cuadradas, un estudiante que se sienta más cómodo razonando a un nivel concreto podría intentar utilizar 24 cuadrados para hacer un rectángulo y luego hallar el perímetro así

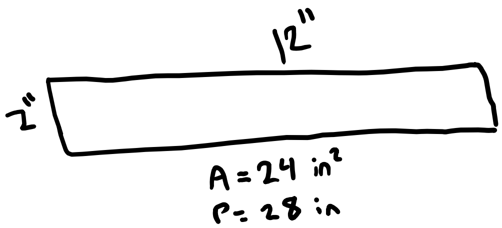
Intento 1:



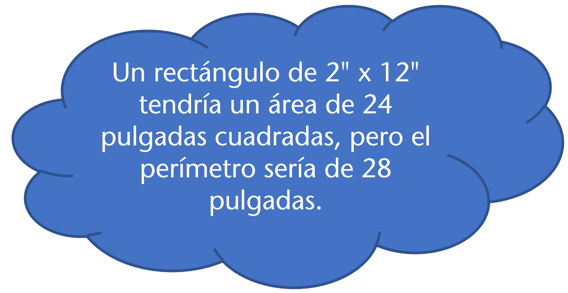
Intento 2:



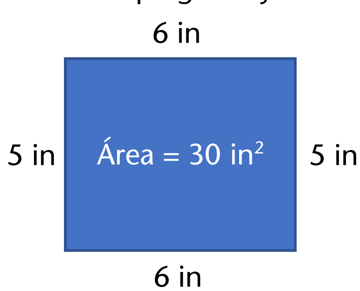
2) **Jugar con el área de forma representativa o abstracta.** Un estudiante que piense de forma más abstracta sobre el área podría hacer un dibujo aproximado para orientarse con la pregunta o incluso razonar sin necesidad de ningún apoyo visual:



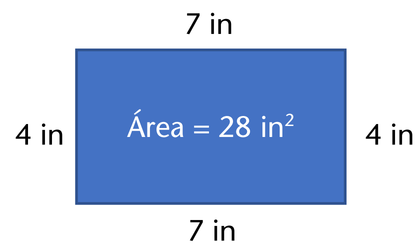
o



3) **Juegue con el perímetro.** Un estudiante con un enfoque más concreto que desee comenzar por el perímetro del rectángulo podría cortar un trozo de cuerda de 22 pulgadas y experimentar formando rectángulos con él sobre papel cuadriculado de una pulgada. Luego, podría contar los cuadrados del interior para determinar el área. Un estudiante con un razonamiento podría optar por hacer bocetos de rectángulos con perímetros de 22 pulgadas y calcular sus áreas:



Demasiado



Cada vez más

(¡No es tan sencillo crear un rectángulo con un perímetro dado! Consulte la lección de muestra gratuita: Comprender el perímetro con fórmulas en el Plan de estudios para adultos que aprenden matemáticas (CALM) para obtener ideas sobre el desarrollo de este concepto).

4) **Aproveche la estructura.** Explorar la creación de rectángulos con un perímetro fijo puede ayudar a los estudiantes a descubrir un patrón en la relación entre la longitud y el ancho. Dado que el perímetro incluye dos veces la longitud y dos veces el ancho debe ser la mitad del perímetro. En otras palabras, si el rectángulo tiene un perímetro de 22 pulgadas, entonces la longitud y el ancho deben sumar 11 pulgadas. Con esta información, un estudiante podría organizar una tabla con distintas combinaciones de largo y ancho para encontrar la que produce el área deseada:

Longitud	Ancho	Área
1	10	10
2	9	18
…	…	…

PREGUNTA 23

El área de un rectángulo es de 24 pulgadas cuadradas. El perímetro del rectángulo es de 22 pulgadas. ¿Cuál es la longitud del lado más corto del rectángulo?

A. 2 pulgadas

B. 3 pulgadas

C. 4 pulgadas

D. 6 pulgadas

E. 8 pulgadas

Mi estrategia:

Mi estrategia favorita:

Me gusta esta estrategia porque:

¿Saldrá esto en el examen?

APÉNDICES

No todas las preguntas tipo test serán apropiadas para hablemos del examen. En estos apéndices encontrará algunos ejemplos de preguntas que no funcionarán bien con esa rutina, pero que de todos modos tienen algo que enseñarnos a nosotros y a nuestros estudiantes.

Apéndice 1: Aprender a dejar pasar algunas preguntas

La práctica de la interpretación de las preguntas de los exámenes y la perseverancia en su resolución permiten a los estudiantes encontrar puntos de entrada a muchas de las cuestiones que se plantean en los exámenes de alto nivel, incluso aunque no hayan estudiado explícitamente los temas que se examinan. Sin embargo, habrá preguntas que estén fuera de su alcance. Es importante que tanto maestros como estudiantes lo sepan y lo acepten. Por ejemplo, considere la siguiente pregunta de examen:

> La gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$ es una parábola. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola?
>
> **A.** (-6, 5)
>
> **B.** (-3, 4)
>
> **C.** (-3, -4)
>
> **D.** (3, -4)
>
> **E.** (5, 6)

Es probable que aquí haya suficiente vocabulario y notación desconocidos ***como para que no sea posible*** interpretar el problema dado el poco tiempo de que dispone el estudiante para realizar el examen. A veces eso ocurre, y les ocurrirá a sus estudiantes cuando vayan a hacer el examen. Se encontrarán con preguntas sobre conceptos que usted no les enseñó. Se encontrarán con preguntas a las que no encontrarán sentido debido a un vocabulario o una notación desconocidos o porque, sencillamente, no han aprendido el concepto que la pregunta pone a prueba.

Hay una solución sencilla para este problema: adivinar rápidamente y seguir adelante. La clave para un estudiante es ser capaz de discernir qué preguntas merecen su tiempo y cuáles no. La presencia de una variable no significa necesariamente que una pregunta esté fuera de su alcance, pero cuando la pregunta bien podría estar escrita en una lengua extranjera, no merece la pena que un estudiante pierda su valioso tiempo intentando lidiar con ella. Nadie puede responder con certeza a una pregunta que no entiende.

Los estudiantes deben aprender a leer una pregunta y preguntarse si pueden encontrarles sentido a las matemáticas de la pregunta. A veces, el vocabulario desconocido no tiene por qué ser una barrera. Por ejemplo, una pregunta puede decir que una máquina ***gobnabbler*** puede producir 16 ***herbledingles*** cada 5 minutos y preguntar cuántos ***herbledingles*** pueden producir dos máquinas ***gobnabbler*** en 3 horas. Es probable que un estudiante pueda razonar sobre ello sin saber nunca lo que es un ***herbledingle*** o una máquina ***gobnabbler***. Por otro lado, si una pregunta requiere que los estudiantes evalúen una expresión como $\log_3(81)$ y nunca han visto nada parecido antes, no se gana mucho intentando averiguar o adivinar lo que significa en una situación de gran peso y cronometrada. Depende del estudiante, en el momento en que se enfrenta a una pregunta, decidir si merece la pena su tiempo, pero debe ir al examen sabiendo que no todas las preguntas lo serán y que eso está bien. Incluso podría trabajar eso en cualquier práctica de examen que haga: el primer paso para abordar un problema es decidir si va a abordarlo.

Es importante que nosotros y nuestros estudiantes reconozcamos que no es factible preparar a los estudiantes para que obtengan una puntuación perfecta en el examen de matemáticas HSE. Una puntuación perfecta debería indicar que tienen el equivalente a una educación secundaria completa, algo que lleva cuatro años en la vida de un adolescente cuyo trabajo principal es asistir a la escuela. Para los estudiantes adultos que entran en nuestros programas y que a menudo necesitan aprender temas que se encuentran en el nivel de la escuela media o inferior, simplemente no tienen el tiempo ni los recursos para aprender todo lo que aparece en el examen. Debemos aceptar que no enseñaremos todo lo que aparece en el examen, y tenemos que ayudar a nuestros estudiantes a aceptarlo también.

Hay dos preguntas que es importante plantearse a la hora de decidir si un estudiante está preparado para hacer el examen:

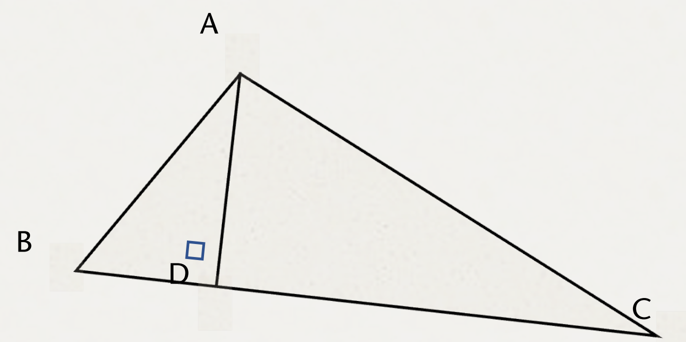
1. ¿Están preparados para superar el examen mediante la resolución de problemas, el razonamiento, la capacidad de estimación y las buenas técnicas para realizar el examen?
2. ¿Están preparados para su siguiente paso (universidad, carrera profesional, nuevo trabajo, etc.)?

Éstas son las cosas que importan. Importan mucho más que asegurarse de que los estudiantes están preparados para responder a todas las preguntas posibles que puedan ver en el examen. Si la respuesta a la segunda pregunta es no, entonces aprobar el examen y salir de su programa prepara a los estudiantes para el fracaso. Por el bien de nuestros estudiantes, debemos tener una visión más amplia que centrarnos solo en los resultados de los exámenes. Un enfoque conceptual de la enseñanza de las matemáticas, la aritmética y la resolución de problemas prepara a los estudiantes para el examen y para la vida, pero todos tenemos que estar dispuestos a dejar de lado algunas preguntas y temas para que los estudiantes puedan poner en práctica su capacidad de razonamiento en aquellas cuestiones a las que ***puedan*** dar sentido.

Hay otro punto importante aquí para los maestros. A la hora de seguir desarrollando sus propias mentes matemáticas y sus habilidades de enseñanza, obtendrá mejores resultados para sus estudiantes si centra su aprendizaje en la comprensión conceptual y la resolución de problemas al nivel en el que trabajan sus estudiantes que si se esfuerza en conceptos de mayor nivel y más abstractos hasta estar seguro de que podría obtener una puntuación perfecta en el examen. Para muchas personas que enseñan matemáticas a estudiantes adultos, esos conocimientos matemáticos de nivel de bachillerato pertenecen a décadas pasadas, y puede que ni siquiera entonces tuvieran sentido. <u>Si no puede responder a la pregunta de la parábola, eso no influye en su cualificación para enseñar matemáticas a estudiantes adultos.</u> Es más importante ser capaz de modelar el pensamiento crítico, la curiosidad y una mentalidad de crecimiento para sus estudiantes que ser capaz de demostrar cómo calcular parábolas. Es más importante hacer crecer su propia comprensión conceptual y su capacidad de pensamiento flexible para poder fomentar esas cosas en sus estudiantes que ser capaz de explicar cómo hacer cada pregunta del examen.

Apéndice 2: Sobre el vocabulario

Algunas preguntas que los estudiantes encontrarán en los exámenes estandarizados no pueden resolverse mediante el razonamiento. En su lugar, requieren que los estudiantes conozcan y apliquen vocabulario y definiciones. Por ejemplo, considere la siguiente pregunta:



¿Cuál es la mejor descripción de la relación entre los segmentos de línea $\overline{AD}$ y ?$\overline{BC}$

A. $\overline{AD}$ es congruente con $\overline{BC}$

B. $\overline{AD}$ es paralelo a $\overline{BC}$

C. $\overline{AD}$ es perpendicular a $\overline{BC}$

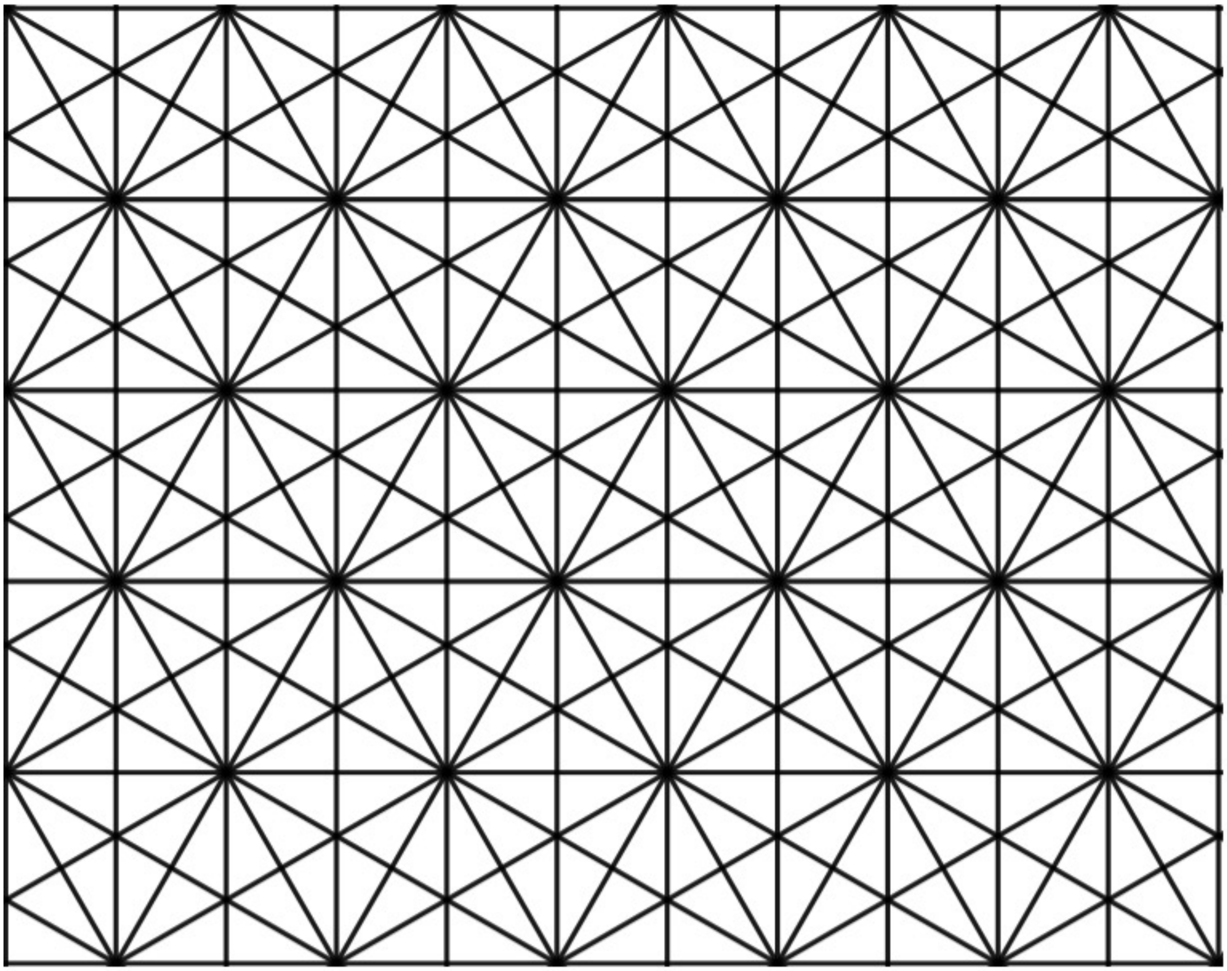
D. $\overline{AD}$ es semejante a $\overline{BC}$

E. $\overline{AD}$ es igual a $\overline{BC}$

Para poder responder a esta pregunta, el estudiante debe reconocer la relación entre los dos segmentos de recta y debe ***conocer su nombre***. Puede que no sea posible abordar esta pregunta conceptualmente, pero sí es posible enseñar el vocabulario matemático conceptualmente.

Hay mucho vocabulario matemático que aprender y es importante que los estudiantes lo aprendan, tanto para poder responder a preguntas como la anterior como para poder comunicar su pensamiento y comprender el de los demás. Algunas personas creen que es mejor enseñar previamente o por adelantado todo el vocabulario que los estudiantes necesitarán para una lección, de modo que no se confundan o tropiecen cuando se encuentren con palabras desconocidas. Sin embargo, creará un aprendizaje más duradero y profundo si mantiene la atención en el concepto e introduce el vocabulario una vez que los estudiantes tengan un concepto para el que necesiten una palabra. Comprender un concepto antes de tener la palabra para él crea una necesidad intelectual del vocabulario.

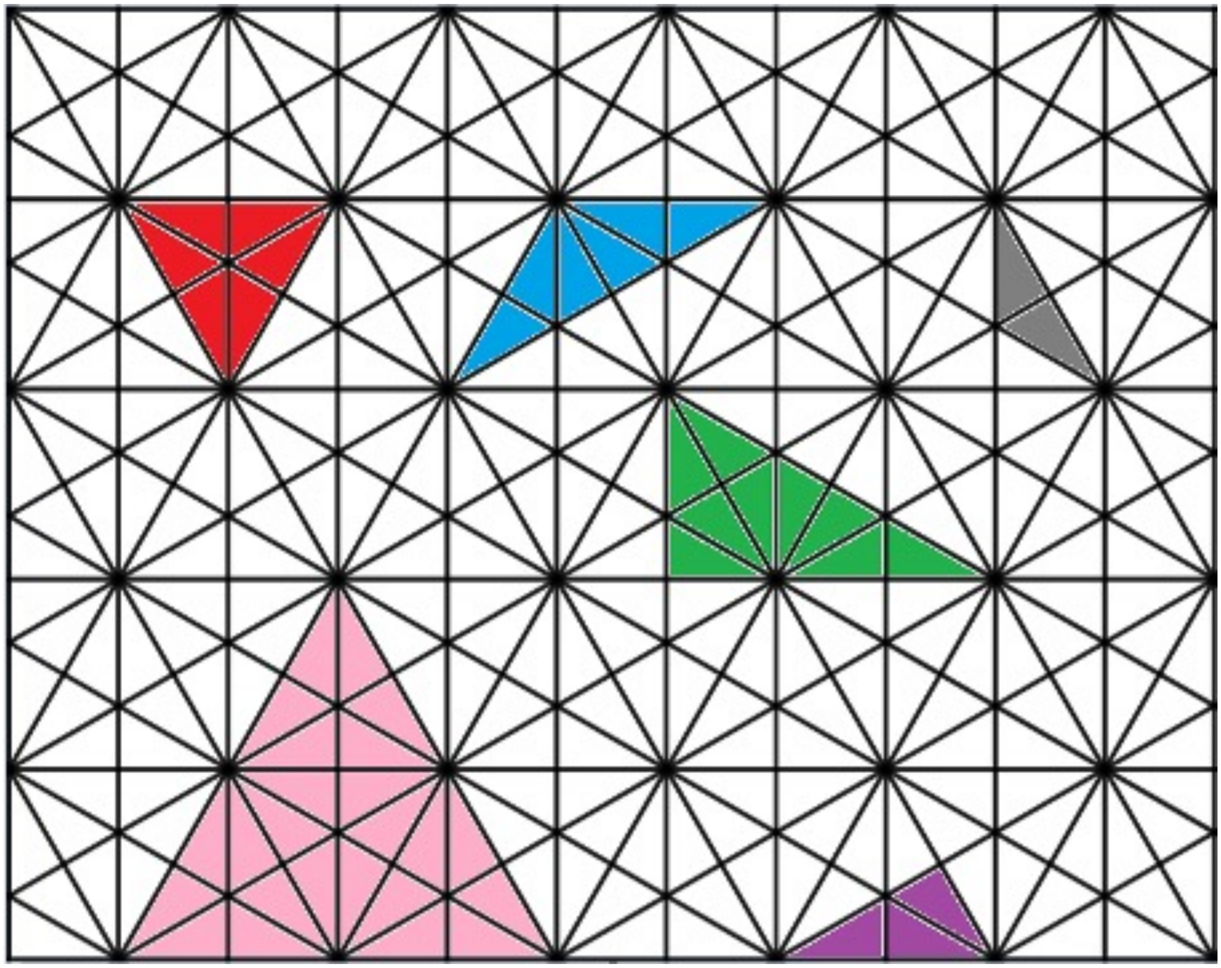
La geometría está especialmente cargada de vocabulario y es especialmente rica en cosas bellas que ese vocabulario puede servir para describir. ¿Qué pasaría si, en lugar de empezar una lección con una lista de palabras largas e intimidantes, diéramos a los estudiantes unos lápices de colores y un diseño como el de la página siguiente para que lo colorearan?



¿Qué es lo primero que ve en el patrón anterior? ¿Cómo lo describiría? Si quiere explorar sus propias ideas antes de seguir leyendo, puede hacer clic aquí para acceder a una página que puede imprimir y colorear usted mismo. Después de colorear, pregúntese cómo describiría sus hallazgos a alguien que no pudiera ver su papel. ¿Qué vocabulario necesitaría utilizar?

¿Qué ve? Quizá vea triángulos, rectángulos o líneas paralelas. Quizá vea trapecios o rombos. Quizá vea diferentes tipos de ángulos. Tal vez vea congruencia o semejanza. Con cierta libertad para colorear y explorar, los estudiantes descubrirán muchos conceptos geométricos importantes que casualmente tienen nombre. Una vez que su clase esté inmersa en un debate enriquecedor sobre los conceptos, será relativamente sencillo introducir el vocabulario importante en la conversación y los estudiantes tendrán un concepto listo y esperando al que asociarlo.

Por ejemplo, supongamos que un estudiante encuentra los siguientes triángulos en el patrón:



¿Qué preguntas podría hacer el estudiante sobre sus triángulos? ¿Qué vocabulario podrían necesitar para hablar de estos?

Incluso plantear la pregunta "¿Cuántos triángulos ***distintos*** he encontrado?" puede estimular comprensiones clave tanto conceptuales como de vocabulario, mientras el estudiante reflexiona sobre lo que significa que los triángulos "distintos". (¿Cree que el estudiante ha identificado todos los triángulos posibles? ¿Cómo justificaría que lo ha logrado o que aún faltan algunos?)

¿Qué otras figuras, conceptos y relaciones están presentes? Empezar las conversaciones geométricas con "¿Qué observan?" y luego preguntar "¿Cómo podrían describirlo?" fomenta la participación activa de los estudiantes en el aprendizaje conceptual. Además, los prepara y motiva a incorporar nuevo vocabulario que les ayude a expresar sus ideas. En lugar de memorizar que un rombo es un cuadrilátero con cuatro lados iguales pero que de alguna manera se parece a un cuadrado y a la vez no, pueden recordar que "rombo" es el nombre de la figura ***que*** descubrieron y comprender por qué una forma es un rombo y otra no.

Una vez que los estudiantes han adquirido cierto vocabulario, se abre un mundo de nuevas posibilidades. Pueden explorar y responder preguntas como: ¿Cuántos trapezoides diferentes pueden encontrar? ¿Cuántos paralelogramos hay? ¿Dónde observan líneas perpendiculares? ¿Cómo pueden estar seguros de que realmente son perpendiculares?, etc.

El vocabulario no tiene que enseñarse por separado de los conceptos ni tiene que ser complicado o intimidante. Después de analizar a fondo el patrón anterior u otros objetos geométricos similares, ¿podrían sus estudiantes identificar la relación entre los segmentos de línea en el problema original?

He aquí otras dos buenas opciones para exploraciones que pueden generar la necesidad de vocabulario:

Caleidoscopio

https://www.adultnumeracynetwork.org/Kaleidoscope

Creado en Desmos. Los estudiantes pueden manipular las figuras moviendo un control deslizante.

Polypad

https://mathigon.org/polypad

Hay una gran cantidad de opciones geométricas para explorar en este recurso gratuito de Mathigon.org.

Tenga en cuenta que, Polypad permite a los usuarios cambiar el fondo de blanco a una cuadrícula o matriz de puntos. Busque el botón en la parte derecha de la pantalla que parece una cuadrícula (imagen de la derecha) para cambiar el fondo.